

COMPORTEMENT FRACTAL DE L'UNIVERS

Docteur NORBERT BAYO

87200 Saint JUNIEN

I L'Univers en gros et au détail.

1°) *L'Univers en gros.*

Dans la Relativité Générale, la formule d'Einstein relative au comportement de l'Univers s'écrit :

$$\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \frac{8\Pi Gd}{3} + \frac{\lambda}{3} \quad (1)$$

Notre hypothèse de départ va consister à considérer que l'Univers a un comportement fractal. Ce qui est vrai pour lui, l'est pour ses constituants, que ce soit une galaxie comme la Voie Lactée, une de ses étoiles comme le Soleil, une planète comme la Terre (et son satellite la Lune) et pour finir, la pomme de Newton.

Mais en « descendant l'échelle » on peut considérer à un moment que la portion d'Univers proche est plate (donc $k = 0$) et que la constante cosmologique a une incidence tout à fait négligeable ($\lambda = 0$). Il vient alors :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\Pi Gd}{3} \quad (2)$$

(Pour éviter des confusions ultérieures, j'ai choisi d comme symbole de densité au lieu de ρ dans la formule originale).

La transformation de TOLMAN nous permet d'écrire :

$$\dot{R}^2 = \frac{8\Pi GdR^2}{3} \text{ ou encore } 2G \cdot \frac{4\Pi d R^2}{3} \quad (3)$$

Dans cette formule, nous exprimons la dérivée de l'espace \dot{R}^2 en face d'un Univers considéré comme un gaz sans collisions.

Avec une température à $3^\circ K$, nous aurions une expression de la matière :

$$\dot{R}^2 = 2G \cdot \frac{4\Pi d R^2}{3} = 2G \cdot \frac{M}{R} \quad (4)$$

Donc \dot{R}^2 est la dérivée de la masse en fonction du « rayon », que ce soit un « rayon » ou une « distance ».

2°) *L'Univers au détail.*

Nantis de cette formule, nous allons nous pencher sur la formule de Newton, dans le comportement de nos « objets » familiers.

$$F = G \frac{M \cdot M'}{R^2} \text{ qu'on peut écrire : } G \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{M'}{R}$$

Donc :

$$F = G \frac{M M'}{R^2} = G \cdot \frac{M}{R} \cdot \frac{M'}{R} = G \cdot \dot{R}^2 (M;R) \cdot \dot{R}^2 (M';R) \quad (5)$$

$$F = G \cdot \dot{R}^2(M ; R) \cdot \dot{R}^2(M' ; R) = G \cdot \frac{4\Pi dR^2}{3} \cdot \frac{4\Pi d'R^2}{3}$$

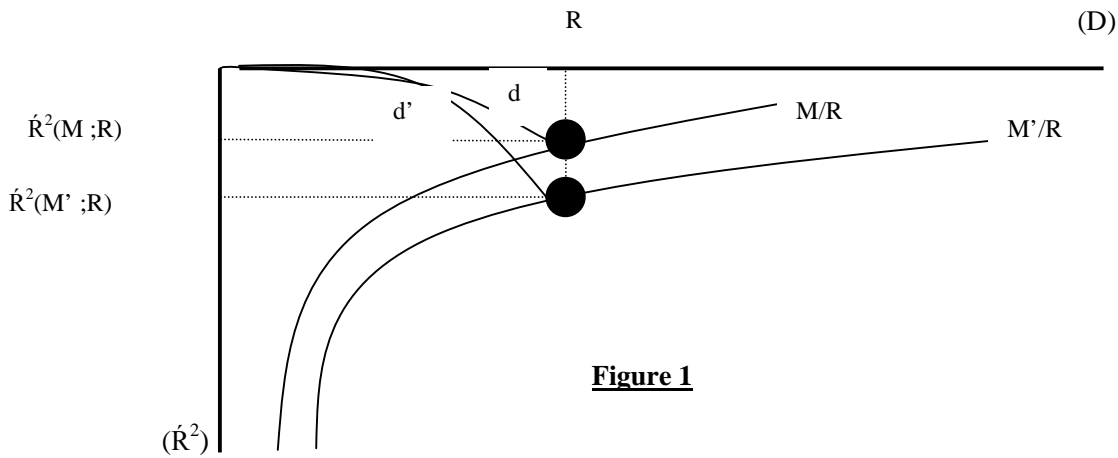


Figure 1

Essayons donc de retrouver ces formules dans une approche : la 3^{ème} loi de Képler.

3^o) La 3^{ème} loi de Képler.

Elle précise que pour une série de planètes tournant autour d'une étoile (le Soleil, par exemple), les rapports des cubes des distances sur les carrés des temps de révolution sont égaux.

- Soit : $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$ etc...

Si, pour simplifier les calculs, on considère les orbites comme pratiquement circulaires, on a :

$$2\Pi R_1 = T_1 V_1 \quad (V = \text{vitesse})$$

$$\text{Soit : } 4\Pi^2 R_1^2 = T_1^2 V_1^2$$

$$\text{Ceci peut s'écrire : } \frac{V_1^2}{4\Pi^2} = \frac{R_1^2}{T_1^2} \quad (6)$$

En multipliant les 2 numérateurs par R :

$$\frac{R_1 V_1^2}{4\Pi^2} = \frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \frac{R_2 V_2^2}{4\Pi^2}$$

$$\text{Soit : } R_1 V_1^2 = R_2 V_2^2 \quad (7)$$

Et, en appelant $R_s(M)$, le rayon de Schwartzschild de la masse M (c'est-à-dire du Soleil dans l'exemple), il vient : $R_s(M) \cdot C^2 = 2G \cdot M$

Il paraît donc licite d'écrire :

$$R_1 V_1^2 = R_2 V_2^2 = R_s(M) \cdot C^2 = 2G \cdot M$$

- On peut aussi développer l'égalité $\frac{V_1^2}{4\Pi^2} = \frac{R_1^2}{T_1^2}$ sous une autre forme.

En posant d_1 tel que :

$$\frac{4\Pi d_1 R_1^3}{3} = M, \text{ on aura en multipliant les 2 numérateurs par } \frac{4\Pi d_1 R_1}{3} :$$

$$\frac{R_1^2}{T_1^2} = \frac{V_1^2}{4\Pi^2} \qquad \frac{4\Pi d_1 R_1^3}{3T_1^2} = \frac{4\Pi d_1 R_1 V_1^2}{3 \cdot 4\Pi^2} \text{ Soit :} \quad (9)$$

$$\frac{M}{T_1^2} = \frac{d_1 R_1 V_1^2}{3\Pi} = \frac{2G \cdot M \cdot d_1}{3\Pi} \quad \text{En simplifiant par M:} \quad (10)$$

$$\frac{1}{T_1^2} = \frac{2G d_1}{3\Pi} ; \text{ soit}$$

$$\begin{aligned} 2G \cdot d_1 T_1^2 &= 3\Pi \\ 2G \cdot d_2 T_2^2 &= 3\Pi \\ 2G \cdot ds T_s^2 &= 3\Pi \quad (\text{pour le trou noir correspondant}) \end{aligned} \quad (11)$$

- Ecrivons de manière différente l'égalité :

$$\frac{M}{T_1^2} = \frac{d_1 R_1 V_1^2}{3\Pi} \rightarrow \frac{M}{R_1} = \frac{d_1 T_1^2 V_1^2}{3\Pi}$$

Et, en remplaçant $T_1^2 V_1^2$ par $4\Pi^2 R_1^2$:

$$2G \cdot \frac{M}{R_1} = \frac{2G \cdot 4\Pi^2 R_1^2 d_1}{3\Pi} = \frac{8\Pi G d_1 R_1^2}{3} = \frac{2GM}{R_1} = \dot{R}^2(M; R_1) \quad (12)$$

Nous avons donc retrouvé ici le formulaire d'Einstein (ou de TOLMAN) pour des corps proches dans un univers plat (local) ou $k = \lambda = 0$

$$\text{Soit : } \dot{R}^2(M ; R_1) = 2G \cdot \frac{M}{R_1} = \frac{8\Pi G d_1 R_1^2}{3} \quad (13)$$

Soit, à des distances R_1 et R_2 les forces gravitationnelles pour 2 masses M et M' s'écrivent :

$$F_1 = \frac{8\Pi G d_1 R_1^2}{3} \cdot \frac{8\Pi G d'_1 R_1^2}{3} = \dot{R}^2(M ; R_1) \cdot \dot{R}^2(M' ; R_1)$$

$$\text{Et : } F_2 = \frac{8\Pi G d_2 R_2^2}{3} \cdot \frac{8\Pi G d'_2 R_2^2}{3} = \dot{R}^2(M ; R_2) \cdot \dot{R}^2(M' ; R_2) \quad (14)$$

D'une manière générale, on peut énoncer les dérivées successives suivantes de la masse :

$$\begin{aligned} - \text{Masse} &\rightarrow 2G M = R V^2 = \frac{8\Pi G d R^3}{3} \\ - \text{Vitesse} &\rightarrow \dot{R}^2 = 2G \frac{M}{R} = V^2 = \frac{8\Pi G d R^2}{3} \\ - \text{Accélération} &\rightarrow \frac{\dot{R}^2}{R} = 2G \frac{M}{R^2} = \frac{8\Pi G d R}{3} = \frac{V^2}{R} = \gamma \\ - \text{Densité} &\rightarrow 2G \frac{M}{R^3} = \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\Pi G d}{3} = \frac{V^2}{R^2} \end{aligned} \quad (15)$$

On doit donc pouvoir réécrire l'égalité :

$$F_1 = \dot{R}^2(M ; R_1) \cdot \dot{R}^2(M' ; R_1) = V_1^2(M ; R_1) \cdot V_1'^2(M' ; R_1) \quad (16)$$

« La force gravitationnelle équivaut au produit des carrés des vitesses respectives imprimées à un corps par l'autre. »

Mais aussi, en combinant dérivée de la vitesse de l'une (= accélération) avec primitive de la vitesse de l'autre (= masse) (si on m'y autorise) :

$$F_1 = M' \cdot \frac{2GM}{R_1^2} = M' \cdot \gamma(M ; R_1) = M' \cdot \frac{R_1 V_1^2}{R_1^2} = M' \cdot \frac{V_1^2}{R_1} \quad (17)$$

Et bien sûr :

$$F_1 = M \cdot \frac{2GM'}{R_1^2} = M \cdot \gamma(M'; R_1) = M \cdot \frac{V_1'^2}{R_1}$$

Et comme, bien sûr, $\frac{V_1'^2}{R_1}$ représente la force centrifuge à laquelle est soumis l'objet M' dans le

champ gravitationnel de M qui lui imprime une vitesse orbitale V_1 , on peut penser que l'objet M' reste sur son orbite par la double conjonction d'une force gravitationnelle qui le fait « chuter » d'une valeur de X mètres dans le même temps où la force centrifuge redresse la trajectoire pour le « remonter » de la même valeur de X mètres.

Si l'objet ralentit : $F_G > F_C$: il tombe.

Si l'objet va plus vite : $F_G < F_C$: il s'échappe de son orbite et s'éloigne.

F_G s'adresse à la masse pesante et F_C à la masse inertielle, égales.

II Genèse et Evolution de \hat{R}^2

1°) Genèse de \hat{R}^2 dans une masse M

Le pouvoir gravitationnel d'un objet est nul au niveau de son centre de gravité.

Pour une masse sphérique et homogène (figure la plus simple et la plus répandue dans l'Univers) il va croître vers la surface :

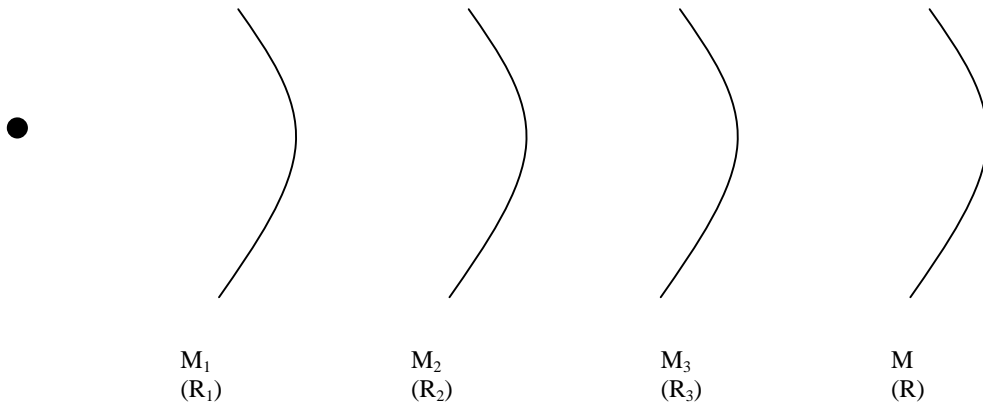


Figure2

On aura :

$$\frac{M_1}{R_1} < \frac{M_2}{R_2} < \frac{M_3}{R_3} < \frac{M}{R} \quad \text{ou encore :} \quad \hat{R}^2(M_1; R_1) < \hat{R}^2(M_2; R_2) < \hat{R}^2(M_3; R_3) < \hat{R}^2(M; R)$$

On peut, certes, représenter \hat{R}^2 en fonction de M et R ; mais cela implique la manipulation de 2 variables. Il est beaucoup plus facile d'utiliser \hat{R}^2 sous son autre forme :

$$\hat{R}^2 = 2G \cdot \frac{4\pi dR^2}{3} = 2G \cdot \frac{M}{R}$$

Car la densité étant constante, cela n'implique qu'une seule variable, c'est-à-dire R

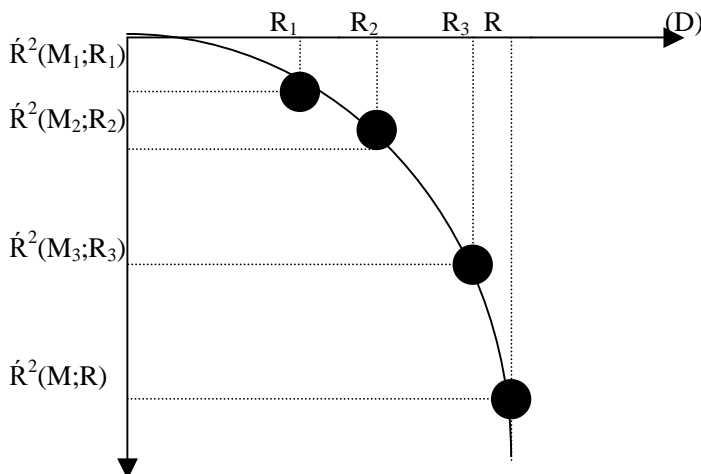


Figure3

2°) Evolution de \dot{R}^2 à distance de M .

M , étant constant, $\frac{M}{R}$ va varier en fonction de l'éloignement, par rapport au centre de gravité de la masse (R devient l'équivalent de D , la distance). Ceci peut s'exprimer dans le schéma suivant :

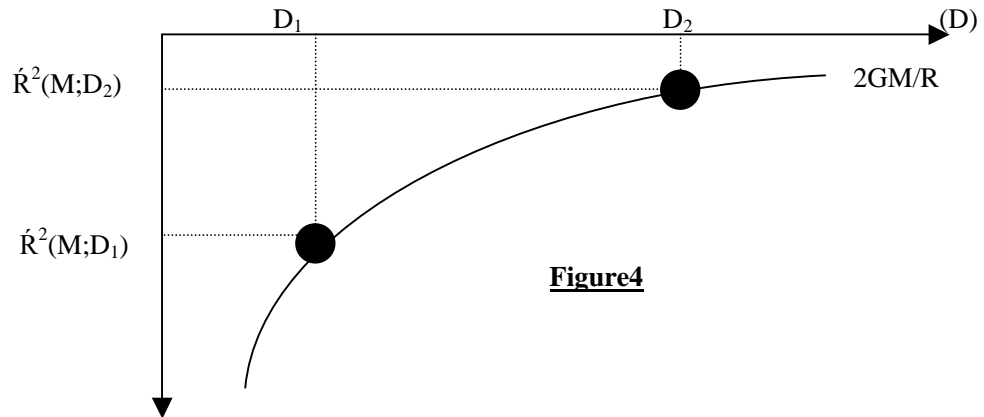


Figure4

3°) Synthèse.

La surface de la masse représente « l'interface » des 2 fonctions : celle de la genèse de \dot{R}^2 ($\dot{R}^2 = 2G \cdot \frac{4\Pi dR^2}{3}$) et celle de la valeur de \dot{R}^2 en fonction de l'éloignement ($\dot{R}^2 = 2G \frac{M}{R}$)

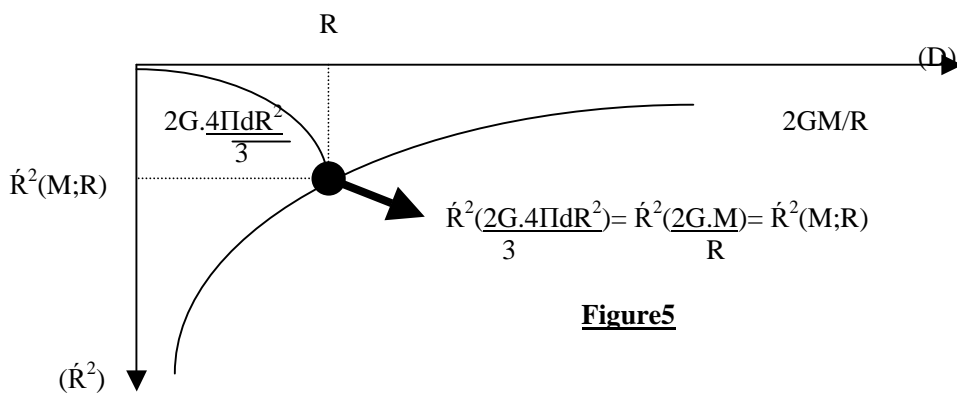


Figure5

III Variations des 3 paramètres : M ; d ; R

Nous allons étudier successivement la variation de 2 paramètres en gardant le 3^{ème} constant.

1°) M constant.

d et R varient de telle sorte que :

$$4/3 \Pi d R^3 = M = \text{constant}$$

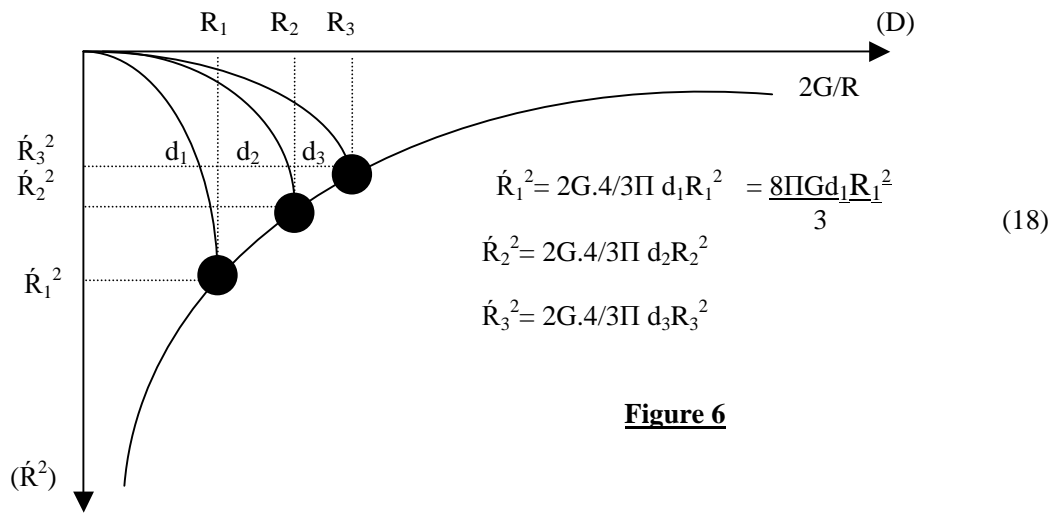


Figure 6

2°) *d. constant.*

M varie en fonction de R

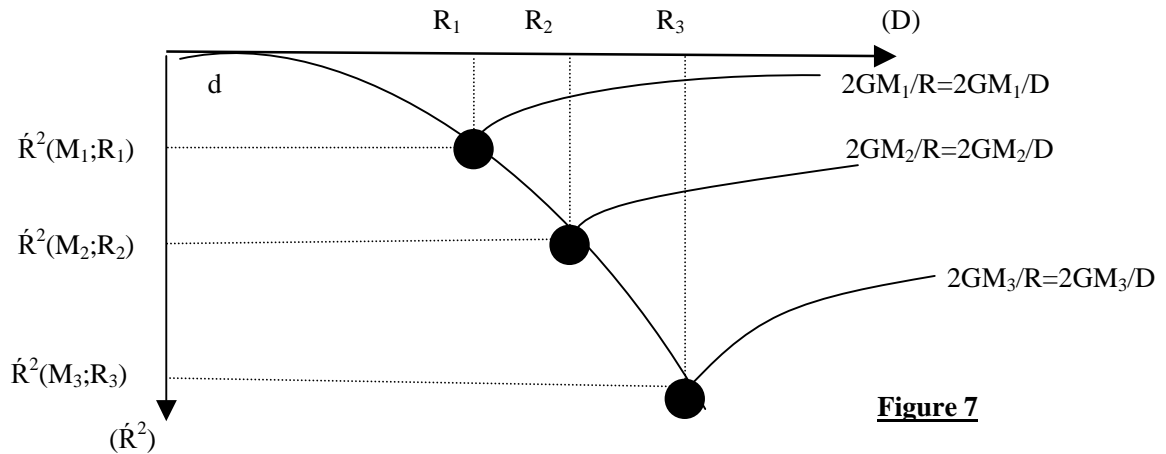


Figure 7

A la surface des 3 sphères de même densité *d* :

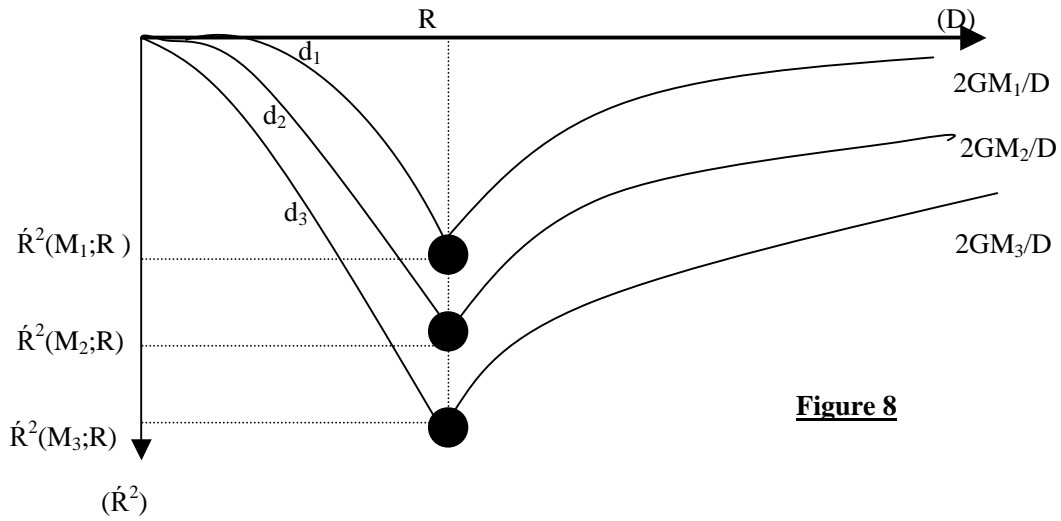
$$\dot{R}^2(M_1;R_1) < \dot{R}^2(M_2;R_2) < \dot{R}^2(M_3;R_3) \quad (19)$$

A la distance *D* :

$$\dot{R}^2(M_1;D) < \dot{R}^2(M_2;D) < \dot{R}^2(M_3;D) \quad (20)$$

3°) R constant.

M varie en fonction de d .



Avec $d_1 < d_2 < d_3$ on a :
 $M_1 < M_2 < M_3$

$$\dot{R}^2(M_1;R) < \dot{R}^2(M_2;R) < \dot{R}^2(M_3;R) \quad (21)$$

Et enfin : $\dot{R}^2(M_1;D) < \dot{R}^2(M_2;D) < \dot{R}^2(M_3;D)$

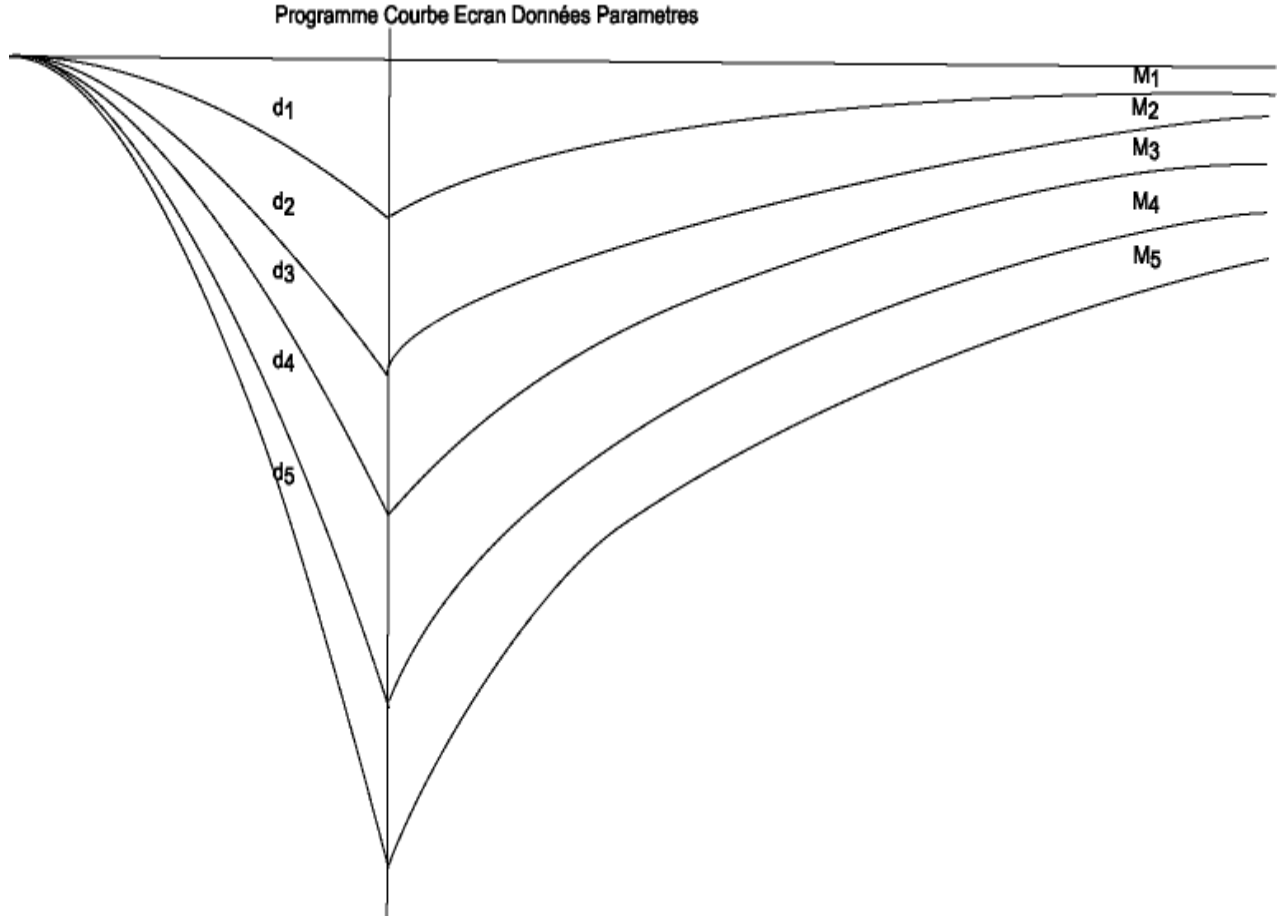
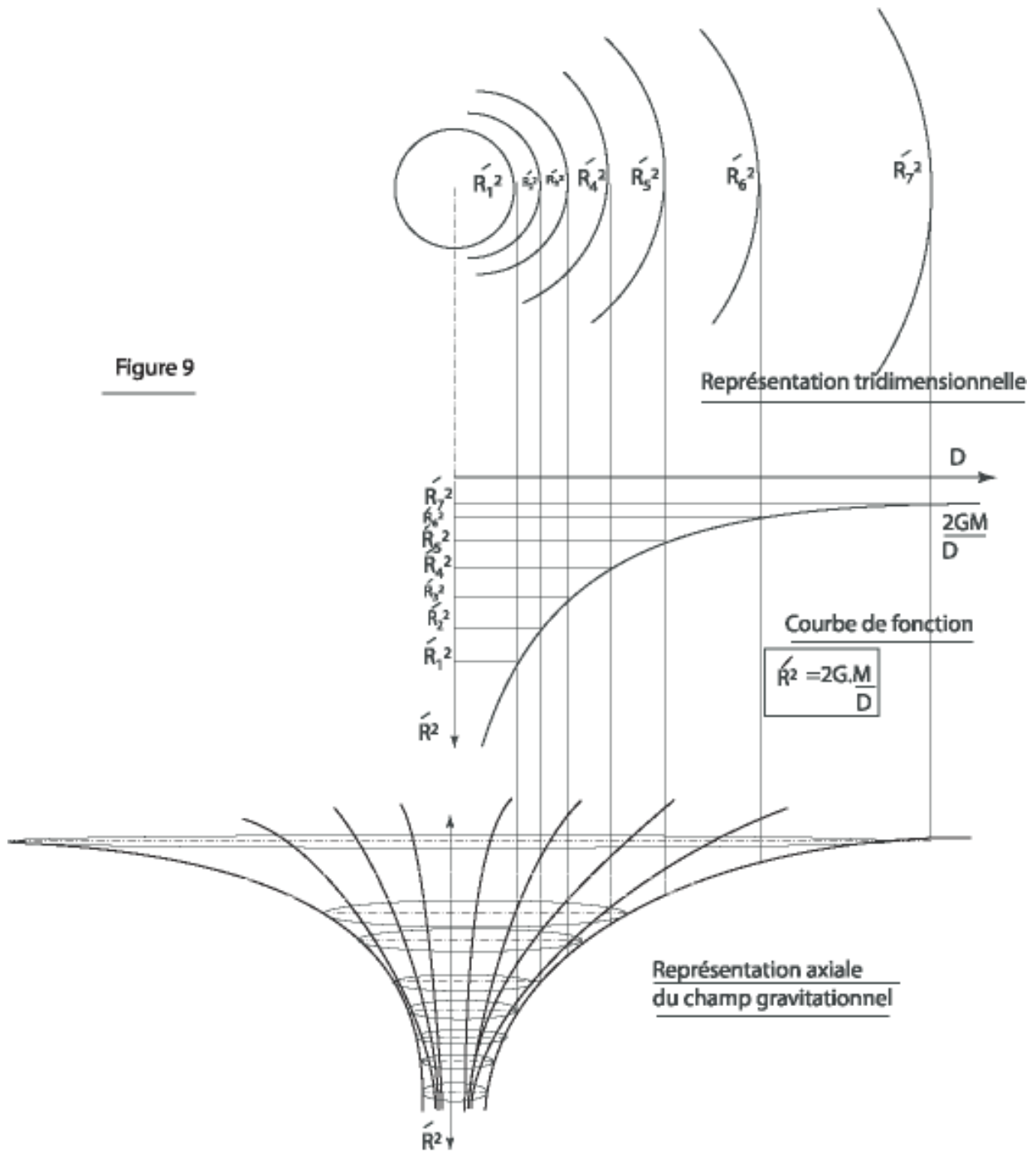


Figure 8bis

(Calcul effectué par ordinateur)

IV Applications

1°) Sphères équivalentes.



TOUTES les masses de même valeur M sont situées sur la courbe de fonction $\hat{R}^2 = \frac{2GM}{D}$ quel que soit leur volume.

On peut donc considérer qu'à une distance D , toutes ces sphères ont un comportement gravitationnel identique. Je les appellerai sphères équivalentes (sous entendu : de comportement gravitationnel identique à la même distance).

Ainsi, avec 2 masses M et M' distantes de D , leurs sphères équivalentes de rayon D s'écrit : (22)

$$M = \frac{4}{3}\Pi d D^3 \quad \text{et} \quad M' = \frac{4}{3}\Pi d' D^3$$

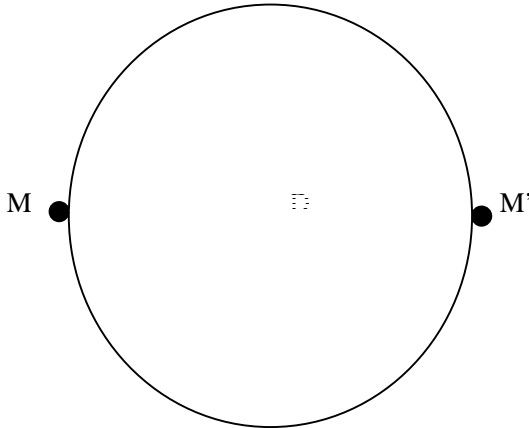


Figure 10

Sur le plan gravitationnel, il est équivalent de représenter 2 masses M et M' de volumes quelconques et également une masse punctiforme M' posée à la surface d'une masse M de rayon D , ou inversement une masse M punctiforme posée à la surface de M' ayant un rayon D .

$$F = \frac{GMM'}{D^2} \text{ devient : } F = \frac{Gdd'D^6}{D^2} = Gdd'D^4 \quad (23)$$

2°) La 3^{ème} loi de Képler. Refaisons appel à cette loi.

-La 3^{ème} loi de Képler indique que pour une série de planètes autour d'une étoile comme le Soleil, le rapport du cube de la distance sur le carré du temps de révolution est constant pour l'étoile considérée. Pour un Soleil de rayon R (et de densité d) nous considérons 3 planètes, décrivant des orbites circulaires pour simplifier les calculs :

- La première dans la « banlieue » solaire, à une distance R .
- La deuxième à une distance D_1 (ou R_1).
- La troisième à une distance D_2 (ou R_2).

En appelant respectivement T , T_1 et T_2 les temps de révolution, la loi donne :

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{D_1^3}{T_1^2} = \frac{D_2^3}{T_2^2} = \text{constant pour la masse } M \text{ du soleil.}$$

Si on considère la masse M du Soleil, on peut écrire, suivant le principe des sphères équivalentes (de densités respectives d , d_1 et d_2).

$$M = \frac{4}{3}\Pi d R^3 = \frac{4}{3}\Pi d_1 D_1^3 = \frac{4}{3}\Pi d_2 D_2^3$$

$$\text{Soit : } \frac{\frac{4}{3}\Pi d R^3}{\frac{4}{3}\Pi d T^2} = \frac{\frac{4}{3}\Pi d_1 D_1^3}{\frac{4}{3}\Pi d_1 T_1^2} = \frac{\frac{4}{3}\Pi d_2 D_2^3}{\frac{4}{3}\Pi d_2 T_2^2} \quad (24)$$

Les numérateurs étant égaux, et après avoir simplifié :

$$dT^2 = d_1 T_1^2 = d_2 T_2^2 \quad (25)$$

Remarque : ceci nous ramène à : $2GdT^2 = 2Gd_1 T_1^2 = 2Gd_2 T_2^2 = 3\Pi$

Nous allons donc raisonner sur la 1^{ère} planète, et extrapolerons le résultat aux 2 autres, « banlieusardes » respectives de 2 Soleils, de rayons D_1 et D_2 .

Pour la première planète, à une distance R du centre du Soleil, et dont le temps de révolution est T, on peut écrire, si sa vitesse est V :

$$TV = 2\Pi R ; \text{ soit : } T = \frac{2\Pi R}{V} ; \text{ et } T^2 = \frac{4\Pi^2 R^2}{V^2}$$

Donc : $dT^2 = \frac{4\Pi^2 dR^2}{V^2}$ Il vient :

$$\frac{dR^3}{dT^2} = \frac{dR^3 V^2}{4\Pi^2 dR^2} = \frac{RV^2}{4\Pi^2} = \text{constant} \quad (\text{toujours pour le soleil } M) = \frac{2GM}{4\Pi^2} \quad (26)$$

En extrapolant aux 2 autres planètes :

$$RV^2 = D_1 V_1^2 = D_2 V_2^2 = \text{constant} = 2GM ; \text{ et } \frac{R^3}{T^2} = \frac{D_1^3}{T_1^2} = \frac{D_2^3}{T_2^2} = \frac{2GM}{4\Pi^2} \quad (27)$$

-En reprenant la formule nous pouvons écrire :

$$\frac{dR^3}{dT^2} = \frac{RV^2}{4\Pi^2} \text{ soit } \frac{dR^3}{R} = \frac{dT^2 V^2}{4\Pi^2}$$

Et comme $R^2 = \frac{T^2 V^2}{4\Pi^2}$, on a :

$$\frac{dR^3}{R} = dR^2 \text{ ou encore : } \frac{4/3\Pi dR^3}{R} = 4/3\Pi dR^2$$

$$\text{Soit : } \frac{M}{R} = 4/3\Pi dR^2 \rightarrow \frac{2GM}{R} = \frac{8\Pi G dR^2}{3}$$

$$\frac{2GM}{R} = \frac{8\Pi G dR^2}{3} = \dot{R}^2_{(M;R)} \quad (28)$$

En extrapolant aux 2 autres planètes :

$$\text{Et } \left. \begin{aligned} \dot{R}^2_{(M;D1)} &= \frac{2GM}{D_1} = 8/3 \Pi G d_1 D_1^2 = V_1^2 \\ \dot{R}^2_{(M;D2)} &= \frac{2GM}{D_2} = 8/3 \Pi G d_2 D_2^2 = V_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Chacune des 3 planètes est donc respectivement satellite de 3 soleils de masse M, et de rayons R, D₁ et D₂, développant à leur surface des dérivées respectives $\dot{R}^2(M;R)$, $\dot{R}^2(M;D_1)$, $\dot{R}^2(M;D_2)$ avec des vitesses V, V₁ et V₂.

Nous avons donc :

$$2GM = \dot{R}^2_{(M;R)} \cdot R = \dot{R}^2_{(M;D1)} \cdot D_1 = \dot{R}^2_{(M;D2)} \cdot D_2 \quad (30)$$

Mais aussi : $RV^2 = D_1 V_1^2 = D_2 V_2^2 = 2GM$

$$\text{Soit : } \frac{\dot{R}^2_{(R)} R}{RV^2} = \frac{\dot{R}^2_{(D1)} D_1}{D_1 V_1^2} = \frac{\dot{R}^2_{(D2)} D_2}{D_2 V_2^2} = 1$$

En simplifiant, il vient, pour M :

$$\frac{\dot{R}^2_{(R)}}{V^2} = \frac{\dot{R}^2_{(D1)}}{V_1^2} = \frac{\dot{R}^2_{(D2)}}{V_2^2} = \text{constant} = 1 \quad (31)$$

Donc : - Une dérivée $\dot{R}^2_{(R)}$, engendre une vitesse V² propre à R.

- Mais aussi : si un satellite a une vitesse V², c'est qu'il est soumis à une dérivée $\dot{R}^2_{(M;R)}$, ou une \dot{R}^2 égale.

Nous allons en tirer 2 applications, à propos des trous noirs et des galaxies.

Avant de passer à ces applications, nous allons faire quelques remarques.

REMARQUES: Elle s dépendent de l'égalité entre C² et \dot{R}^2_{s} , (dérivée du trou noir)

REMARQUE 1: Si R_{s1} est le rayon de Schwartzschild d'une masse M_1 , on peut écrire:

$$R_{s1} = \frac{2GM_1}{C^2} \quad \text{ou encore :}$$

$$C^2 = \frac{2GM_1}{R_{s1}} = \frac{8\Pi G d_{s1} R_{s1}^2}{3} = \dot{R}_s^2 \quad \text{d'où:} \quad (32)$$

$$E_1 = M_1 C^2 = M_1 \dot{R}_s^2 \quad (33)$$

REMARQUE 2:

$$R_{s1} = \frac{2GM_1}{C^2} \quad \text{d'où :}$$

$$M_1 = \frac{R_{s1} C^2}{2G} \quad \text{Donc:}$$

$$E_1 = M_1 C^2 = M_1 \dot{R}_s^2 = \frac{R_{s1} C^2}{2G} \cdot \dot{R}_s^2 = \frac{(\dot{R}_s^2)^2 \cdot R_{s1}}{2G} \quad (34)$$

Ecrit autrement;

$$E_1 = \frac{(\dot{R}_s^2)^2}{2G} \cdot R_{s1} \quad \text{avec} \quad \frac{(\dot{R}_s^2)^2}{2G} = \text{constant}$$

Donc, pour des masses $M_1; M_2; M_3$;

$$E_1 = \frac{(\dot{R}_s^2)^2}{2G} \cdot R_{s1} = f(R_{s1}) \quad (35)$$

$$E_2 = \frac{(\dot{R}_s^2)^2}{2G} \cdot R_{s2} = f(R_{s2})$$

$$E_3 = \frac{(\dot{R}_s^2)^2}{2G} \cdot R_{s3} = f(R_{s3})$$

En développant E_1 , on a :

$$E_1 = \frac{(\dot{R}_s^2)^2}{2G} \cdot R_{s1} = \frac{8\Pi G d_{s1} R_{s1}^2}{3} \cdot \frac{8\Pi G d_{s1} R_{s1}^2}{3} \cdot \frac{R_{s1}}{2G}$$

$$E_1 = \frac{32\Pi^2 G d_{s1}^2 R_{s1}^5}{9} \quad (36)$$

REMARQUE 3:

Elle concerne l'égalité : $2G d_s T_s^2 = 3\Pi$

Nous allons montrer que c'est une simplification:

$$2G d_s T_s^2 = \frac{T_s^2 C^2}{C^2} 2G d_s = \frac{4\Pi^2 R_s^2 \cdot 2G d_s}{C^2}; \text{ soit :}$$

$$\frac{4\Pi^2 R_s^2}{C^2} \cdot 2G d_s = \frac{3\Pi}{C^2} \cdot \frac{8\Pi G d_s R_s^2}{3} = 3\Pi \frac{\dot{R}_s^2}{C^2} \quad (37)$$

Par extension, pour une masse M_1 de densité d_1 à une distance R_1 ; puis de densité d_2 en R_2 :

$$2Gd_1 T_1^2 = 3\Pi \cdot \frac{\dot{R}^2(M_1; R_1)}{V_1^2} \quad (38)$$

$$2Gd_2 T_2^2 = 3\Pi \cdot \frac{\dot{R}^2(M_1; R_2)}{V_2^2}$$

Cette extension de $2Gd_s T_s^2 = 3\Pi$ nous permet donc de calculer facilement 2 paramètres supplémentaires : $\dot{R}^2(M_1)$ et V^2

REMARQUE 4:

Elle concerne $F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}$

$$F = \frac{R_{s1} C^2}{2GR} \frac{R_{s2} C^2}{2GR} \cdot G = \frac{(\dot{R}_s^2)^2 \cdot R_{s1} R_{s2}}{4GR^2} \text{ ou encore :} \quad (39)$$

$$F = \frac{(\dot{R}_s^2)^2 \cdot R_{s1} \cdot R_{s2}}{2G \cdot 2R^2} \quad (40)$$

$$F = \frac{E_1 \cdot R_{s2}}{2R^2} = \frac{E_2 \cdot R_{s1}}{2R^2} \quad (41)$$

REMARQUE 5:

$$\frac{\dot{R}^2 = 8\Pi Gd}{R^2 \cdot 3} \rightarrow (\text{pour } M_1) = \frac{8\Pi Gd_{s1}}{3} = \frac{\dot{R}_s^2}{R_{s1}^2}$$

$$\frac{C^2}{R_{s1}^2 \cdot 3} \rightarrow \frac{R_{s1} C^2}{R_{s1}^3 \cdot 3} = \frac{8\Pi Gd_{s1}}{3}$$

$$R_{s1} C^2 = \frac{8\Pi Gd_{s1} R_{s1}^3}{3} = \frac{2GM_1}{C^2} = R_{s1} C^2 \quad (42)$$

$$R_{s1} = \frac{2GM_1}{C^2}$$

Autre manière :

- De démontrer que $\dot{R}_s^2 = C^2$ (puisque'ils sont interchangeables)
- De retrouver la formule de SCHWARZSCHILD à partir de la formule d'EINSTEIN, pour un corps quelconque M_1 .
- De penser qu'à l'inverse, en partant de la formule de SCHWARZSCHILD on peut démontrer pour une masse quelconque M_1 , que la formule générale d'EINSTEIN relative à l'univers, s'applique quand on considère que

$$K = \lambda = 0$$

$$\frac{\dot{R}^2 + k}{R^2} = \frac{8\Pi Gd}{3} + \frac{\lambda}{3} \text{ devient : } \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\Pi Gd}{3}$$

3° Les trous noirs.

Le rayon de SCHWARZSCHILD marque l'horizon du trou noir, correspondant à une vitesse de libération théorique égale à celle de la lumière.

Si $R_s(M)$ est ce rayon d'une masse M , on peut écrire :

$$R_S(M) = \frac{2GM}{C^2} \text{ ou } R_S(M) = \frac{2G}{C^2} \cdot M = f(M) \quad \text{puisque } \frac{2G}{C^2} = \text{constant}$$

D'où, pour la masse M :

$$R_1 V_1^2 = R_2 V_2^2 = R_3 V_3^2 = R_S C^2 = 2GM = f(M)$$

$$\text{Donc : } \frac{\dot{R}_{(R)}^2}{V^2} = \frac{\dot{R}_{(R1)}^2}{V_1^2} = \frac{\dot{R}_{(R2)}^2}{V_2^2} = \frac{\dot{R}_{(RS)}^2}{C^2} = \text{constant} = 1 \quad \dot{R}_{(RS)}^2 \text{ est bien sûr } \dot{R}_S^2$$

$$\text{Et aussi : } \dot{R}_S^2 = \frac{2GM}{R_S(M)} \text{ ou : } R_S(M) = \frac{2GM}{\dot{R}_S^2}$$

Comme $R_S(M)$ et M sont proportionnels, on a donc :

$$\dot{R}_S^2 = C^2 = \text{constant}$$

La « dérivée de Schwarzschild » à l'horizon d'un trou noir de masse quelconque, est une constante: C^2

Nous allons donc schématiser le comportement de 3 masses M_1, M_2 et M_3 vis à vis de leurs rayons de Schwarzschild R_{S1}, R_{S2} et R_{S3} , et celle de l'univers en théorie.

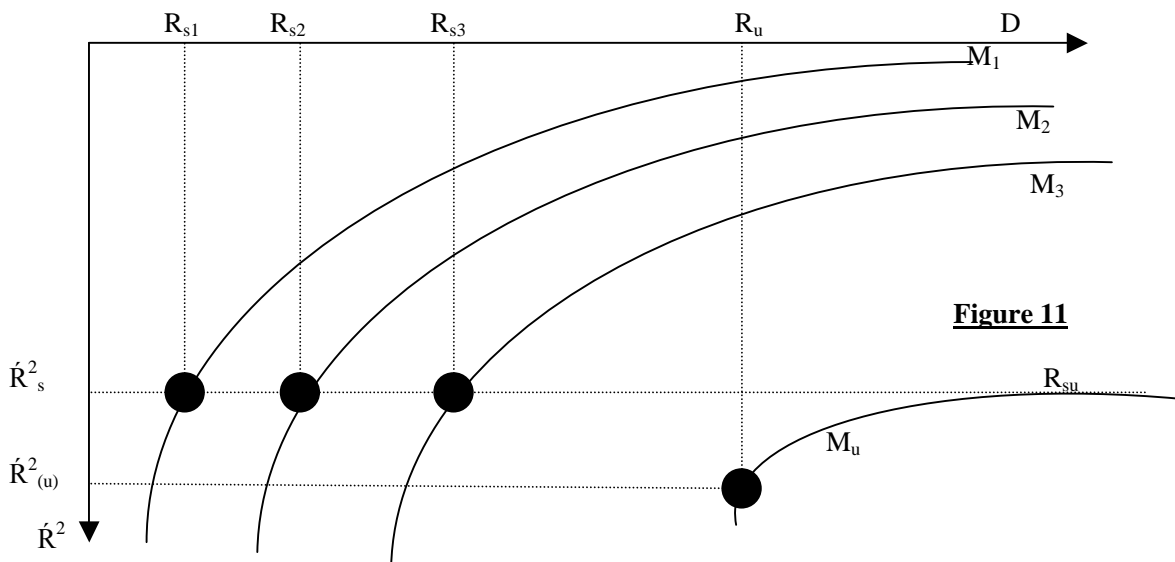


Figure 11

Pour les 3 masses $M_1 < M_2 < M_3$, on a :

$$\dot{R}_s^2 = \frac{2GM_1}{R_{S1}} = \frac{2GM_2}{R_{S2}} = \frac{2GM_3}{R_{S3}} \quad (43)$$

Nous constatons aussi :

- Que toute dérivée est sensée pouvoir atteindre de manière asymptote, la valeur \dot{R}_s^2 , par réduction du volume de la masse concernée.
- Que l'Univers de masse M_u serait en train d'atteindre (d'après certaines estimations), son rayon R_{su} au bout de 15 milliards d'années d'existence ; R_{su} étant estimé à 15 milliards d'années-lumière.

Mais l'Univers, cas particulier, répond-il à la courbe générale, ce qui laisserait à penser que dans le passé on pouvait avoir pour un rayon $R_u < R_{su}$ une dérivée $\dot{R}_{(u)}^2 > \dot{R}_s^2$? ? Compte tenu de son comportement très particulier, ceci ne doit être considéré que comme une pure hypothèse.

Si c'était le cas, on pourrait alors constater que pendant l'expansion de l'Univers, la dérivée aurait une « expression hyperbolique ». Or, comme la dérivée \dot{R}_s^2 EST est la vitesse de la lumière....

Nous n'irons pas plus loin dans ce domaine.

Remarque :

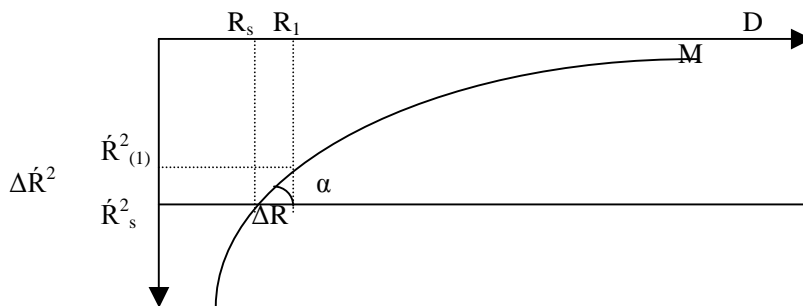


Figure 12

Considérons une masse quelconque M de rayon R_1 développant une dérivée $\dot{R}_{(1)}^2$, avant qu'elle ne devienne un trou noir de rayon R_s développant bien sûr une dérivée \dot{R}_s^2 .

On suppose que : $\Delta R = R_1 - R_s = 1$ unité

Par ailleurs : $\Delta \dot{R}^2 = \dot{R}_s^2 - \dot{R}_{(1)}^2$

Le segment d'hyperbole pouvant être assimilable à une droite en première approximation, on appellera α l'angle entre l'hyperbole passant par \dot{R}_s^2 , et l'horizontale passant par $\dot{R}_{(1)}^2$, parallèle à (D)

$$\Delta \dot{R}^2 = \sin \alpha ; \Delta R = \cos \alpha ; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \dot{R}^2}{\Delta R} \quad \longrightarrow \quad \frac{\Delta \dot{R}^2}{1} = \Delta \dot{R}^2 = \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad \text{avec } \Delta R = 1 \text{ unité}$$

$$\Delta \dot{R}^2 = \dot{R}_s^2 - \dot{R}_{(1)}^2 = \frac{2GM}{R_s} - \frac{2GM}{R_1} = \frac{2GM(R_1 - R_s)}{R_s R_1}$$

Si on considère que $R_s R_1 \neq R_s^2$ et que $\Delta R = 1$ unité

$$\Delta \dot{R}^2 = \frac{2GM(R_1 - R_s)}{R_s R_1} \neq \frac{2GM \Delta R}{R_s R_1} \neq \frac{2GM \Delta R}{R_s^2} \quad ; \quad \text{avec } \Delta R = R_1 - R_s = 1$$

$$\operatorname{Tg} \alpha = \frac{\Delta \dot{R}^2}{\Delta R} = \frac{2GM}{R_s^2} = \Delta \dot{R}^2$$

$$R_s = \frac{2GM}{C^2} \quad \text{d'où :} \quad M = \frac{R_s C^2}{2G}$$

D'où : $\text{tg } \alpha = \frac{2GR_s C^2}{2GR_s^2}$;

Donc : $\text{tg } \alpha = \frac{C^2}{R_s}$

Et puisque $\Delta R = 1$; $\text{tg } \alpha = f(\Delta R^2) = f(C^2/R_s)$ (44)

Ainsi :

- Si R_s est très petit, $\text{tg } \alpha$ tend vers une très grande valeur : la moindre variation ΔR fait que l'objet n'est plus un trou noir, donc que de la matière (ou la lumière) peut s'en échapper.
- Si R_s est très grand, $\text{tg } \alpha$ tend vers ϵ .

Il existe tout un secteur « autour » de R_s où la dérivée est très voisine de \dot{R}_s^2 :

Le trou noir ingèrera de la matière (ou en perdra ?) sans beaucoup changer de comportement.

4° Relation dérivée-vitesse ; extrapolation à la morphologie de certaines galaxies.

a) Revenons sur les notions de dérivée et vitesse, nous pouvons en déduire la morphologie de certaines galaxies.

D'après Képler : $\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2}$ pour une masse M.

Nous avons vu que : $R_1 V_1^2 = R_2 V_2^2 = R_s C^2 = 2GM$

Et Schwarzschild nous dit que :

$2R_s C^2 = 2G \cdot 2M$. Donc :

$2R_1 V_1^2 = 2R_2 V_2^2 = 2R_s C^2 = 2G \cdot 2M$.

$\dot{R}^2(M;R_1) = \frac{2GM}{R_1} = \frac{R_1 V_1^2}{R_1} = V_1^2$ (pour M) } (45)

$\dot{R}^2(2M;2R_1) = \frac{2G \cdot 2M}{2R_1} = \frac{2R_1 V_1^2}{2R_1} = V_1^2$ (pour 2M)

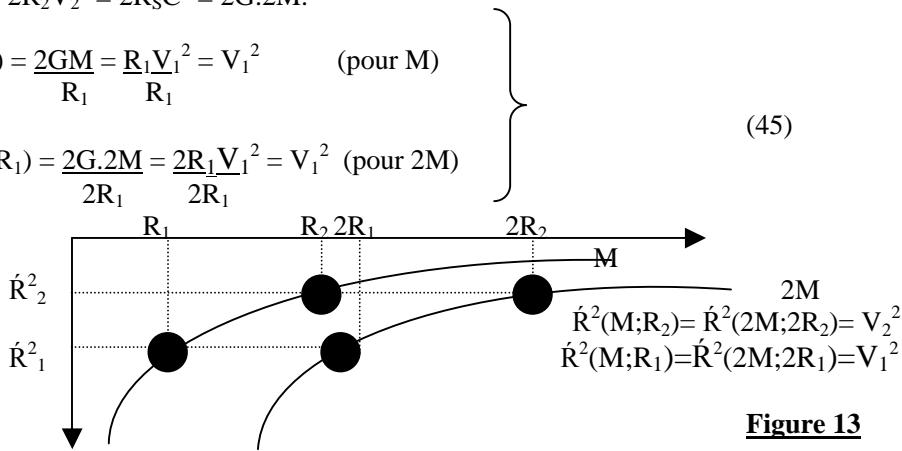


Figure 13

b) Autre écriture de la relation dérivée-vitesse

1° Avec la masse M, on évalue les vitesses imprimées à la masse M' :

Sur la courbe de fonction $\dot{R}^2_{(M)} = \frac{2GM}{R}$, on considère 2 points, R_1 et R_2 étant les rayons.

$\dot{R}^2(M;R_1) = \frac{2GM}{R_1} = \frac{2GM}{R_1} \cdot \frac{T_1^2 V_1^2}{4\Pi^2 R_1^2} = \frac{2GM}{4\Pi^2} \cdot \frac{T_1^2}{R_1^3} \cdot V_1^2$ (46)

Comme $\frac{2GM}{4\Pi^2} = \text{constant}$ et $\frac{T_1^2}{R_1^3} = \text{constant}$ pour M, on a :

$\dot{R}^2(M;R_1) = f(V_1^2)$ de même

$$\dot{R}^2(M;R_2) = \frac{2GM}{4\Pi^2} \cdot \frac{T_2^2}{R_2^3} \cdot V_2^2 \quad \text{soit } \dot{R}^2(M;R_2) = f(V_2^2) \quad (47)$$

2°) Avec les masses M et 2M:

-On considère sur 2M un rayon $R'_1=2R_1$. On aura :

$$\frac{d_1 R_1^3}{d_1 T_1^2} = \frac{M}{d_1 T_1^2} \quad \text{et } \frac{d'_1 R_1'^3}{d'_1 T_1'^2} = \frac{2M}{d'_1 T_1'^2} \quad \text{soit:}$$

$$\frac{d'(2R_1)^3}{d'_1 T_1'^2} = \frac{d'_1 \cdot 8R_1^3}{d'_1 T_1'^2} = \frac{2M}{d'_1 T_1'^2} \quad \text{Il ressort que}$$

$$d'_1 = \frac{d_1}{4} \quad \text{et } T_1'^2 = 4T_1^2 \quad \text{soit : } T_1' = 2T_1$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\Pi R_1 = T_1 V_1 \\ 2\Pi(2R_1) = (2T_1) \cdot V'_1 \end{array} \right\} \quad V'_1 = V_1 \quad (48)$$

$$\text{Donc } \dot{R}^2(M;R_1) = \dot{R}^2(2M;2R_1) \quad (49)$$

Une masse M de rayon R_1 développe a sa surface une dérivée $\dot{R}^2(M;R_1)$ égale à celle d'une masse 2M et de rayon $2R_1$; cette égalité des dérivées entraîne une égalité des vitesses, bien sûr.

-Comme on l'a vu avec M , on peut écrire avec 2 M :

$$\dot{R}^2(2M;2R_1) = \frac{2G \cdot 2M}{2R_1} = \frac{2G2M}{2R_1} \cdot \frac{T_1'^2}{4\Pi^2 \cdot 4R_1^2} \cdot V_1'^2 = \frac{2G2M}{2R_1} \cdot \frac{4T_1^2 V_1^2}{4\Pi^2 \cdot 4R_1^2}$$

$$\text{D'ou } \dot{R}^2(M;R_1) = \dot{R}^2(2M;2R_1) = \frac{2G \cdot 2M}{4\Pi^2} \cdot \frac{4T_1^2}{8R_1^3} \cdot V_1^2 = \frac{2G \cdot M}{4\Pi^2} \cdot \frac{T_1^2}{R_1^3} \cdot V_1^2$$

$$\text{Et comme: } \dot{R}^2(M;R_1) = \frac{2GM}{4\Pi^2} \cdot \frac{T_1^2}{R_1^3} \cdot V_1^2$$

On retrouve donc à nouveau: $V'_1 = V_1$

c) Application : morphologie de certaines galaxies

1°) Galaxie spirale :

Un analyse des vitesses stellaires a montré dans une certaine galaxie une valeur quasi-constante, estimée a 280 km/sec . Voyons quels renseignements morphologiques on peut en tirer.

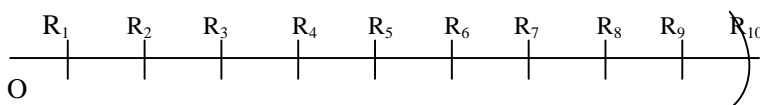


Figure 14

De puis le centre de la galaxie, nous divisons son rayon en parts égales (10 par exemple) telle que :
 $R_2 = 2R_1$; $R_3 = 3R_1$; $R_4 = 4R_1$... $R_{10} = 10R_1$.

Si la vitesse en ces différents points est constante, compte tenue de la relation $\dot{R}^2 = V^2$ on a :

$$V_1^2 = V_2^2 = V_3^2 = \dots\dots\dots V_{10}^2 \quad \text{et} \quad \dot{R}_{(1)}^2 = \dot{R}_{(2)}^2 = \dot{R}_{(3)}^2 = \dots\dots\dots \dot{R}_{(10)}^2 \quad (50)$$

En convertissant en masse, il vient:

$$\dot{R}_{(1)}^2 = \frac{2G M_1}{R_1} = \frac{2G M_2}{R_2} = \dots\dots\dots \frac{2G M_{10}}{R_{10}}$$

Et, en passant par les valeurs $R_2 = 2R_1$ etc.

$$\dot{R}_{(1)}^2 = \dot{R}_{(2)}^2 = \dot{R}_{(10)}^2 = \frac{2G M_1}{R_1} = \frac{2G 2M_1}{2R_1} = \frac{2G 10 M_1}{10R_1} \quad (51)$$

Donc $M_2 = 2 M_1$ et $M_{10} = 10 M_1$

Si l'on représente les masses par des cylindres, de surface S_1 etc.... de hauteur h_1 etc..... on aura:

$$M_1 = S_1 h_1 = \Pi R_1^2 h_1$$

$M_2 = S_1 h_1 + S_2 h_2$ avec $S_2 h_2 = M_1$. Si S est la surface en R_2 :

$$S = \Pi R_2^2 = \Pi(2R_1)^2 = 4\Pi R_1^2$$

$$S_2 = S - S_1 = 4\Pi R_1^2 - \Pi R_1^2 = 3\Pi R_1^2 = 3S_1$$

Donc : $h_2 = h_1/3$ on aura de même :

$$S_3 = 5S_1 \quad \longrightarrow \quad h_3 = h_1/5$$

$$S_4 = 7S_1 \quad \longrightarrow \quad h_4 = h_1/7$$

$$S_5 = 9S_1$$

$$S_6 = 11S_1$$

$$S_7 = 13S_1$$

$$S_8 = 15 S_1$$

$$S_9 = 17 S_1$$

$$S_{10} = 19 S_1 \quad \longrightarrow \quad h_{10} = h_1/19$$

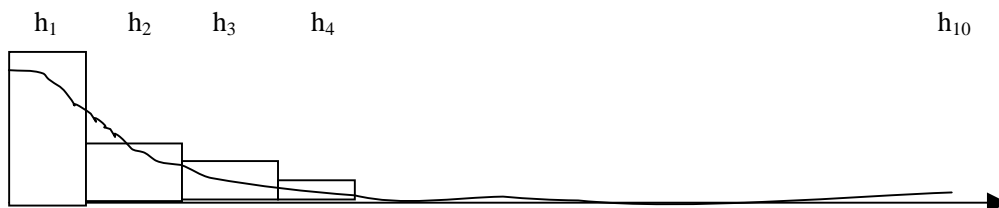


Figure 15

Soit, de manière spatiale :

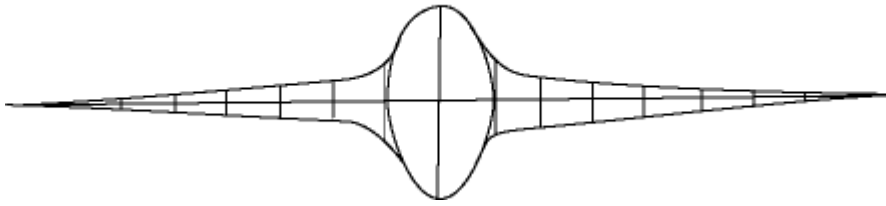


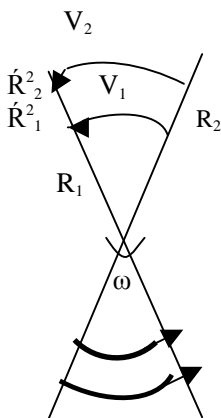
Figure 16

La répartition de la masse par valeurs égales le long du rayon explique l'égalité des vitesses dans cette galaxie spirale.

Toutes les galaxies spirales ont-elles ce même comportement ? Ou à partir de vitesses différentes, peut-on extrapoler des morphologies particulières?. Probablement.

2°) Galaxie barrée:

Si l'on considère une galaxie barrée dont la "barre" est parfaitement rectiligne, on a la possibilité d'apprécier les vitesses relatives de 2 points situés à la moitié du rayon, et à son extrémité.



La vitesse ω est identique (par définition)

Figure 17

$$\begin{aligned} R_2 &= 2R_1 \\ V_2 &= 2V_1 \\ V_2^2 &= 4V_1^2 \end{aligned}$$

Si $\dot{R}^2_{(1)}$ est la dérivée de la masse comprise en R_1 , et $\dot{R}^2_{(2)}$ celle en R_2 , (donc de l'ensemble de la galaxie),

On peut écrire :

$$\dot{R}^2_{(1)} = \frac{2 G M_1}{R_1} = V_1^2$$

$$\dot{R}^2_{(2)} = \frac{2 G M_2}{R_2} = V_2^2 = 4V_1^2$$

D'où : $\dot{R}^2_{(2)} = 4 \dot{R}^2_{(1)}$

$$\text{Soit : } \dot{R}^2_{(2)} = 4 \dot{R}^2_{(1)} = \frac{2 G M_2}{2R_1} \longrightarrow M_2 = 8M_1 \quad (52)$$

$$M_2 = \frac{4}{3} \pi d_2 R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \pi d_1 R_1^3$$

$$R_2 = 2R_1 \quad \text{donc } R_2^3 = 8R_1^3 \quad \text{donc}$$

$$\frac{4}{3} \pi d_2 (R_1^3 \times 8) = 8 \times \frac{4}{3} \pi d_1 R_1^3$$

donc $d_1 = d_2$

(53)

En graphique :

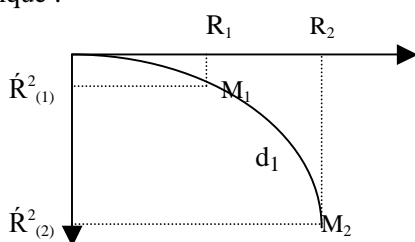


Figure 18

Comme le volume de la barre peut être évalué à:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(R_2) &= 2 \text{Vol}(R_1) \\ \text{le volume de chacun des bras} \\ \text{peut être évalué à } &\frac{8-2}{2} = 3 \text{Vol}(R_2) \end{aligned}$$

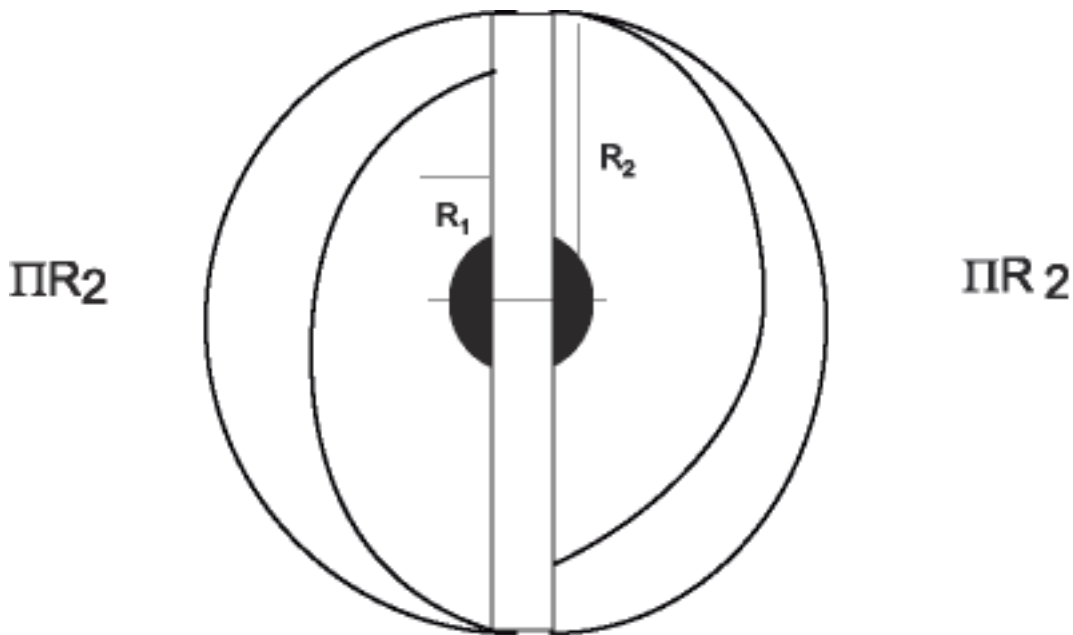


Figure 19

Ou encore :

$$\# \frac{2 \Pi R_2}{2} = \Pi R_2 \quad (54)$$

NB: la vitesse angulaire étant constante, les temps de révolution sont constants :

$$T_1^2 = T_2^2 \Rightarrow 2Gd_1 T_1^2 = 2G d_2 T_1^2 = 3\Pi \Rightarrow d_1 = d_2 \quad (55)$$

5°) APPLICATION de la fonction: $\frac{\dot{R}^2}{R^2}$

Soit la fonction d'Einstein : $\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\Pi Gd}{3}$

Nous pouvons essayer d'utiliser une transformation de cette nouvelle formule pour tenter de mettre en exergue l'importance de d ; mais aussi pour l'alléger et la rendre plus manipulable dans l'optique de rapports de fonctions.

Ainsi en divisant les 2 termes par 4Π :

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\Pi Gd}{3} \text{ devient } \frac{\dot{R}^2}{4\Pi R^2} = \frac{2G d}{3} = P \quad (56)$$

J'appellerai P (de manière arbitraire) cette fonction, assortie d'un indice quand nécessaire.

Par exemple $\frac{\dot{R}^2(M_1;R_1)}{4\pi R_1^2} = P_1$

Donc: $\frac{P_1}{P_0} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{\frac{\dot{R}^2(M_1;R_1)}{4\pi R_1^2}}{\frac{\dot{R}^2(M_0;R_0)}{4\pi R_0^2}}$

Et, en conséquence, on aura plus clairement:

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{d_1}{d_0}$$

Dans la représentation graphique, nous garderons \dot{R}^2 en ordonnées et R en abscisses. Ceci nous donnera les courbes que nous connaissons bien, alors que R^2 en abscisses aurait donné une droite de pente d, moins "parlante".

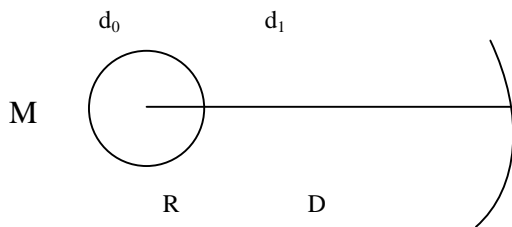


Figure 20

a) A distance de la masse M

$$P_{(D)} = \frac{\dot{R}^2(M;D)}{4\pi D^2} = \frac{2GM}{D} \times \frac{1}{4\pi D^2} = \frac{2GM}{4\pi D^3} = \frac{2Gd_1}{3} \tag{57}$$

b) Dans la masse (ou à sa surface)

$$\frac{\dot{R}^2_{(R)}}{R} = \frac{2GM}{R} = \frac{8\pi G d_0 R^3}{3R} = \frac{8\pi G d_0 R^2}{3}$$

$$P_{(R)} = \frac{\dot{R}^2_{(R)}}{4\pi R^2} = \frac{8\pi G d_0 R^2}{3 \cdot 4\pi R^2} = \frac{2Gd_0}{3} \tag{58}$$

c) Dérivée de la masse:

Si nous appelons M' la dérivée de la masse M, nous voyons que:

$$\frac{\dot{R}^2}{M'} = \frac{2G}{3}$$

Nous avons donc:

-Dans la masse : $P_{(R)} = \frac{\dot{R}^2_{(R)} d_0}{M'} = \text{constante du centre de la masse jusqu'à sa surface} \tag{59}$

-A distance de la masse :

$$P_{(D)} = \frac{\dot{R}^2_{(D)} \cdot d_1}{M'} \quad (60)$$

A distance, $P_{(D)}$ varie comme la densité de la sphère équivalente, de rayon D (position de mesure).

d) Exemples chiffrés:

Dans ces 3 exemples, nous avons successivement 2 sphères de densités égales ; puis de volumes égaux; enfin de densités et volumes différents.

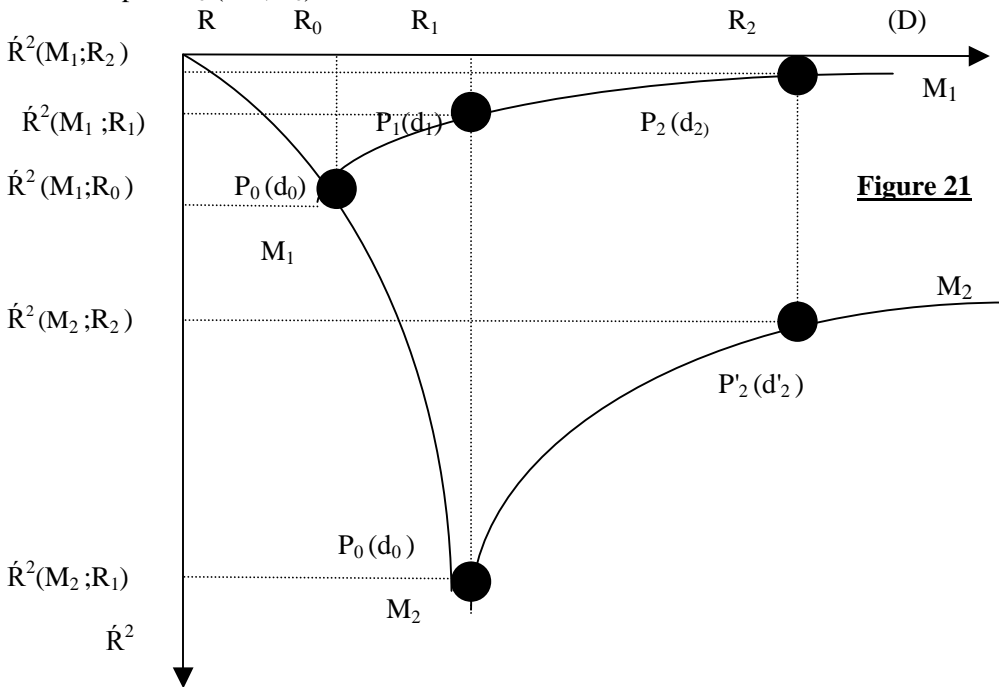
-1) exemple : densités égales(d_0)

Nous prendrons $M_2 = 8M_1$; $R_0 = R$ (unité)

$$R_1 = 2R_0 ; R_2 = 2R_1$$

Nous représentons \dot{R}^2 de M_1 en R_1 par le symbole $\dot{R}^2(M_1;R_1)$ etc.....

De même pour $P_0(M_1;R_0)$



d) Exemples chiffrés:

1) exemple : densités égales(d_0)

$$P_0(M_1;R_0) = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_0)}{4\pi R_0^2} = \frac{2GM_1}{4\pi R_0^2} = \frac{R_0}{4\pi R_0^2} = \frac{8\pi Gd_0 R_0^2}{3 \cdot 4\pi R_0^2} = \frac{2Gd_0}{3}$$

$$P_0(M_2;R_1) = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_1)}{4\pi R_1^2} = \frac{2GM_2}{4\pi (2R_0)^2} = \frac{2R_0}{4\pi (2R_0)^2} = \frac{8\pi Gd_0 \cdot 4R_0^2}{3 \cdot 4\pi \cdot 4R_0^2} = \frac{2Gd_0}{3}$$

$$\text{donc: } P_0(M_1;R_0) = P_0(M_2;R_1) = \frac{2Gd_0}{3} \quad (61)$$

$$P_1(M_1;R_1) = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_1)}{4\pi R_1^2} = \frac{2G M_1}{4\pi \cdot 4R_0^2} = \frac{2G \cdot \frac{4}{3} \pi d_0 R_0^3}{3 \cdot 4\pi \cdot 4R_0^2} = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_0}{8} = \frac{2G d_1}{3}$$

$$P_1(M_1;R_1) = \frac{8\pi G d_0 R_0^2}{3 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 4R_0^2} = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_0}{8} = \frac{2G \cdot d_1}{3} \quad (62)$$

Donc : $P_0(M_1;R_0) = 8P_1(M_1;R_1) \rightarrow \frac{P_0}{P_1} = \frac{M_2}{M_1} = 8 = \frac{d_0}{d_1}$

Donc $P_0(M_1;R_0) = P_0(M_2;R_1) = 8P_1(M_1;R_1)$ (63)

De même:

$$P_2(M_1;R_2) = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_2)}{4\pi R_2^2} = \frac{8\pi G d_2 (4R_0)^2}{3 \cdot 4\pi \cdot (4R_0)^2} = \frac{2G d_2}{3}; \text{ mais aussi} \quad (64)$$

$$P_2(M_1;R_2) = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_0)}{4\pi \cdot (4R_0)^2} = \frac{8\pi G d_0 R_0^2}{4\pi \cdot (4R_0)^2} = \frac{2G d_0}{3 \cdot 64} = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_0}{64} \quad (65)$$

$$P_2(M_1;R_2) = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_0}{64} = \frac{2G d_2}{3}$$

Donc : $d_0 = 64 d_2$ (66)

$$\frac{P_2(M_1;R_2)}{P'_2(M_2;R_2)} = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_2)}{\dot{R}^2(M_2;R_2)} = \frac{8\pi G d_2 (4R_0)^2}{8\pi G d'_2 (4R_0)^2} = \frac{d_2}{d'_2} = \frac{d_0}{64} \cdot \frac{8}{8} = \frac{1}{8} \quad (67)$$

Enfin :

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{d_0}{d_1} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{P'_2(M_2;R_2)}{P_2(M_1;R_2)} = \frac{d'_2}{d_2} = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_1)}{\dot{R}^2(M_1;R_1)} = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_2)}{\dot{R}^2(M_1;R_2)} = 8 \quad (68)$$

-2) exemple : volumes égaux

Avec $M_2 = 4 M_1 ; R_2 = 2R_1$

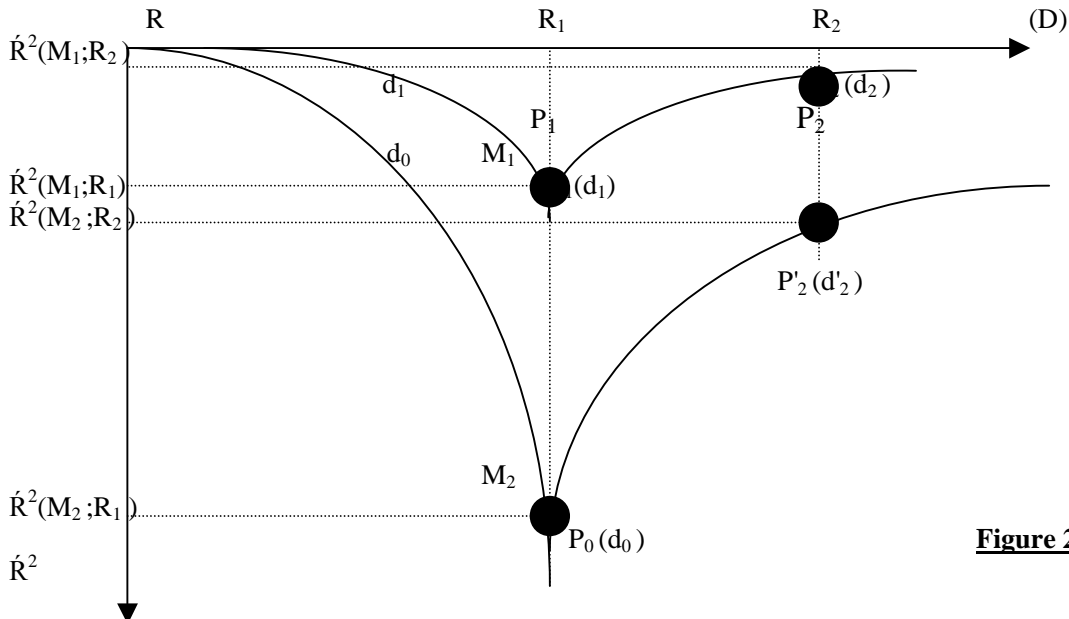


Figure 22

-2)exemple : volume égaux

$$P_1(M_1;R_1) = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_1)}{4\pi R_1^2} = \frac{2GM_1}{\frac{R_1}{4\pi R_1^2}} = \frac{8\pi Gd_1 R_1^2}{3.4\pi R_1^2} = \frac{2Gd_1}{3} \quad (69)$$

$$P_0(M_2;R_1) = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_1)}{4\pi R_1^2} = \frac{2GM_2}{\frac{R_1}{4\pi R_1^2}} = \frac{8\pi Gd_0 R_1^2}{3.4\pi R_1^2} = \frac{2Gd_0}{3} \quad (70)$$

Et comme on a posé $M_2 = 4M_1 \longrightarrow d_0 = 4d_1$ (71)

donc $\frac{P_0(M_2;R_1)}{P_1(M_1;R_1)} = \frac{d_0}{d_1} = 4$

$$P_2(M_1;R_2) = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_2)}{4\pi R_2^2} = \frac{2GM_1}{\frac{R_2}{4\pi R_2^2}} = \frac{8\pi Gd_2 R_2^2}{3.4\pi R_2^2} = \frac{2Gd_2}{3}$$

$$P_2(M_1;R_2) = \frac{2GM_1}{\frac{R_2}{4\pi R_2^2}} = \frac{8\pi Gd_1 R_1^3}{3. \frac{R_2}{4\pi R_2^2}} = \frac{8\pi Gd_1 R_2^3}{3. \frac{8R_2^2}{4\pi R_2^2}} = \frac{8\pi Gd_1 R_2^2}{3.8.4\pi R_2^2}$$

$$P_2(M_1;R_2) = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_1}{8}$$

Donc: $P_2(M_1;R_2) = \frac{2Gd_2}{3} = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_1}{8}$

d'ou $d_1 = 8d_2$ et $d_0 = 32d_2$

$$P'_2(M_2;R_2) = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_2)}{4\pi R_2^2} = \frac{2Gd'_2}{3} = \frac{2G}{3} \cdot \frac{d_0}{8}$$

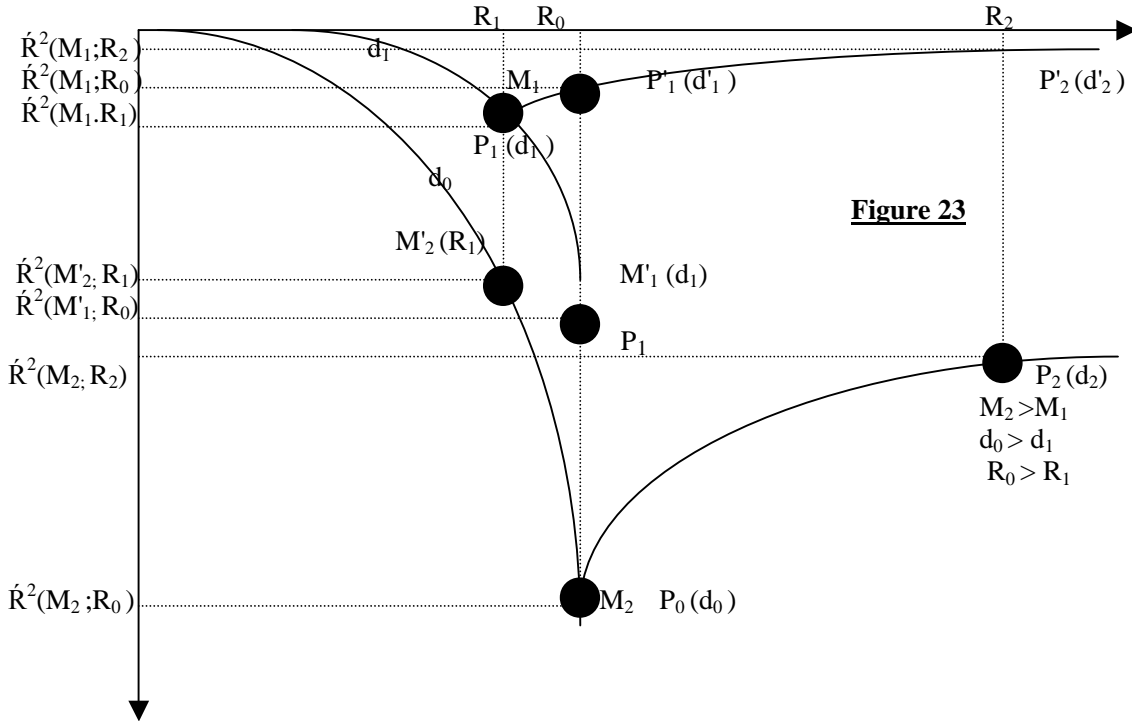
Donc : $d_0 = 8d'_2$

Au total :

$$\frac{P'_2(M_2;R_2)}{P_2(M_1;R_2)} = \frac{d'_2}{d_2} = 4 = \frac{P_0(M_2;R_1)}{P_1(M_1;R_1)} = \frac{d_0}{d_1} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_1)}{\dot{R}^2(M_1;R_1)} = \frac{\dot{R}^2(M_2;R_2)}{\dot{R}^2(M_1;R_2)} \quad (72)$$

-3) exemple : volumes et densités différents

L'étude, plus complexe, va nous faire déboucher sur un exemple qui nous est cher:
le rapport Terre-Lune



On pose: $R_0 = yR_1$; donc M_1 (densité d_1 et rayon R_1) et M_2 (d_0 et R_0) $M'_2(d_0$ et $R_1)$ et $M'_1(d_1$ et $R_0)$

-En R_1 , au niveau du rayon R_1 de M_1 , on a :

$$\frac{M_1}{M'_2(R_1)} = \frac{P_1}{P_0} = \frac{d_1}{d_0} = \frac{\dot{R}^2(M_1; R_1)}{\dot{R}^2(M'_2; R_1)}$$

-A la surface des 2 masses M_1 et M_2 :

$$\dot{R}^2(M_1; R_1) = 2G \frac{4}{3} \Pi d_1 R_1^2$$

$$\dot{R}^2(M_2; R_0) = 2G \frac{4}{3} \Pi d_0 R_0^2 = 2G \frac{4}{3} \Pi d_0 y^2 R_1^2$$

$$\dot{R}^2(M'_2; R_1) = 2G \frac{4}{3} \Pi d_0 R_1^2 \quad \text{Au total:}$$

$$\frac{\dot{R}^2(M_1; R_1)}{\dot{R}^2(M_2; R_0)} = \frac{2G \frac{4}{3} \Pi d_1 R_1^2}{2G \frac{4}{3} \Pi d_0 y^2 R_1^2} = \frac{d_1}{d_0 y^2}$$

$$\frac{\dot{R}^2(M'_2; R_1)}{\dot{R}^2(M_2; R_0)} = \frac{2G \frac{4}{3} \Pi d_0 R_1^2}{2G \frac{4}{3} \Pi d_0 y^2 R_1^2} = \frac{1}{y^2}$$

Et encore on retrouve:

$$\frac{\dot{R}^2(M_1;R_1)}{\dot{R}^2(M_2;R_1)} = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_0)}{\dot{R}^2(M_2;R_0)} = \frac{d_1 y^2}{1} = \frac{d_1}{d_0} \quad (\text{volumes égaux}) \quad (73)$$

-En R_0 au niveau du rayon R_0 de M_2 :

$$\frac{P_1}{P'_1} = \frac{d_1}{d'_1} \quad \text{et} \quad \frac{P_0}{P'_1} = \frac{d_0}{d'_1}$$

Si M'_1 est la masse de rayon R_0 et densité d_1 :

$$\frac{P_1}{P'_1} = \frac{d_1}{d'_1} = \frac{M'_1}{M_1} \quad \text{ou encore :} \quad \frac{P'_1}{P_1} = \frac{d'_1}{d_1} = \frac{M_1}{M'_1} \quad (74)$$

De même entre M'_1 et M_2 (volume égaux)

$$\frac{d_0}{d_1} = \frac{M_2}{M'_1} = \frac{P_0}{P'_1} \quad \text{Par rapprochement, il vient :}$$

$$\frac{M_1/M'_1}{M_2/M'_1} = \frac{d'_1/d_1}{d_0/d_1} = \frac{P'_1/P_1}{P_0/P_1} \quad \text{soit :} \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{d'_1}{d_0} = \frac{P'_1}{P_0} = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_0)}{\dot{R}^2(M_2;R_0)} \quad (75)$$

-En R_2 à une distance R_2 des 2 masses (de leur centre de gravité, bien sûr!)

$$\frac{d'_1}{d_0} = \frac{P'_2}{P_2} = \frac{d'_2}{d_2} = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_2)}{\dot{R}^2(M_2;R_2)} = \frac{M_1}{M_2} \quad (76)$$

-Soit au total:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d'_1}{d_0} = \frac{P'_1}{P_0} = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_0)}{\dot{R}^2(M_2;R_0)} = \frac{P'_2}{P_2} = \frac{d'_2}{d_2} = \frac{\dot{R}^2(M_1;R_2)}{\dot{R}^2(M_2;R_2)} \quad (77)$$

Nous allons voir une application de tout cela, avec les rapports Terre-Lune.

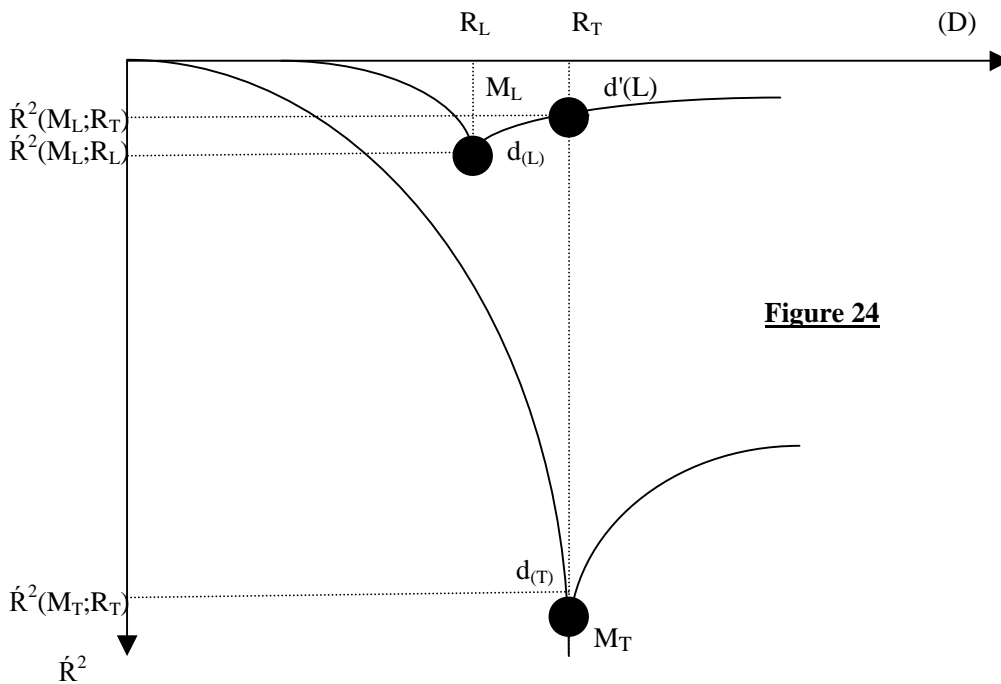


Figure 24

Nous pouvons ici bénéficier de quelques données chiffrées:

$$d_T = 5,52 \text{ g/cm}^3 ; d_L = 3,34 \text{ g/cm}^3 ; \frac{d_L}{d_T} = 0,61 ; \frac{d_T}{d_L} = 1,65$$

$$R_T = 6378 \text{ km} ; R_L = 1738 \text{ km} ; \frac{R_T}{R_L} = 3,67 ; \frac{R_L}{R_T} = 0,27$$

$$M_T = 81 M_L ; \frac{M_L}{M_T} = 0,01227$$

NB: Les rapports de la figure sont faux : il fallait qu'elle reste lisible....

$$\text{au niveau } R_T \quad \frac{M_L}{M_T} = \frac{d'_L}{d_T} = \frac{\dot{R}^2(M_L; R_T)}{\dot{R}^2(M_T; R_T)} \quad (78)$$

Cette formule amène plusieurs commentaires :

*Compte-tenu que $M_T = 81M_L$, la densité d'une lune ayant la taille de la terre serait 81 fois plus faible.

*A la surface de cette lune, la gravité serait 81 fois plus faible qu'à la surface de la terre, c'est à dire que la force gravitationnelle serait 81 fois plus faible, l'observateur étant à la même distance R_T des 2 centres de gravité.

*Dit autrement: à une distance R_T du centre de la lune, ayant son vrai volume, la force gravitationnelle est mesurée 81 fois plus faible qu'à la surface de la terre.

-D'autre part:

$$\dot{R}^2(M_L; R_L) = \frac{2G M_L}{R_L} = 2G \frac{4}{3}\pi d_L R_L^2$$

$$\dot{R}^2(M_L; R_T) = \frac{2G M_L}{R_T} = 2G \frac{4}{3}\pi d'_L R_T^2$$

$$\text{Soit : } \frac{\dot{R}^2(M_L; R_T)}{\dot{R}^2(M_L; R_L)} = \frac{2GM_L/R_T}{2GM_L/R_L} = \frac{R_L}{R_T} = \frac{d'_L R_T^2}{d_L R_L^2} \quad \text{car :} \quad (79)$$

$$4/3 \pi d'_L R_T^3 = 4/3 \pi d_L R_L^3 = M_L$$

-Pour revenir à l'égalité (79), chiffrée elle donne:

$$\frac{\dot{R}^2(M_T;R_T)}{\dot{R}^2(M_L;R_L)} = \frac{R_L}{R_T} = \frac{1738}{6378} = 0,27 \quad \text{ou} \quad \frac{\dot{R}^2(M_L;R_L)}{\dot{R}^2(M_T;R_T)} = \frac{R_T}{R_L} = 3,67 \quad (80)$$

A la surface de la lune, la force gravitationnelle exercée par elle est 3,67 fois plus forte qu'à la distance R_T , soit : $3,67/81 \approx 4,5\%$ de la force engendrée par la terre.

-Mais pourquoi la force gravitationnelle a-t-elle été mesurée à 16,6% de la force gravitationnelle terrestre? C'est parce que l'observateur (donc son appareil de mesure) est 3,67 fois plus près du centre de la lune que celui placé à la surface de la terre. La correction amène donc:

$$(3,67)^2/81 \approx 17\%$$

-En abordant le résultat par la formule de NEWTON:

$$F = \frac{GMM'}{D^2} \quad \text{où } M' \text{ est l'observateur.}$$

$$\text{*Pour la terre: } F_{G(T)} = \frac{2G M_T}{R_T} \cdot \frac{2GM'}{R_T} \quad \text{ou:}$$

$$F_{G(T)} = 2G \frac{4/3\pi d_T R_T^2}{R_T} \cdot \frac{2GM'}{R_T}$$

*Pour la lune:

$$F_{G(L)} = 2G \frac{4/3\pi d_L R_L^2}{R_L} \cdot \frac{2GM'}{R_L}$$

En simplifiant, on obtient un rapport

$$\frac{F_{G(T)}}{F_{G(L)}} = \frac{d_T R_T}{d_L R_L} = \frac{35151}{5804} = 6,06 \quad \text{ou:}$$

$$\frac{F_{G(L)}}{F_{G(T)}} = 1/6,06 \approx 17\% \quad (81)$$

NB: En passant, non par $P = \frac{\dot{R}^2}{4\pi R^2} = \frac{2Gd}{3}$ mais par $\dot{R}^2 = \frac{8\pi Gd}{3}$ on obtiendra strictement les mêmes résultats.

Dr NORBERT BAYO
87200 SAINT JUNIEN

Mr Jean-Philippe GAUTIER