A PROPOS DE LA CONSTANTE G

Un interlocuteur m'a fait remarquer qu'il s'était fait « engloutir par l'avalanche d'équations » contenues dans le site.
Bien que hautement qualifié, il prétendait « avoir du mal à trouver la signification de certaines formules ».
Sans référence précise, j'ai donc décidé de chercher la formule apparemment la plus « bizarre », « ésotérique », « rendant perplexe » de l'ensemble du site. Et j'ai choisi – choix totalement subjectif – celle qui s'écrit :

$2G\ dT^2 = 3\pi$

Elle peut s'interpréter à première vue par « le produit de la densité d'une masse AU POINT DE MESURE et du carré du temps de révolution de l'objet en orbite en ce point ,est constant » (puisque G et 3π sont constants par définition)

A l'aide d'exemples, nous allons constater que ceci est vrai, et d'autre part nous pourrons essayer de chiffrer ce produit, mais aussi d'évaluer la valeur de G relevée alors.

Exemple 1 : le couple Terre- Soleil.

Nous avons retenu les coordonnées suivantes, en unités MKS (mètre, kilogramme, seconde)
- Rayon solaire : 696.000 km , soit $696.\ 10^6$ m.
- Masse solaire : $1,9891.\ 10^{30}$ kg
- Distance Terre – Soleil admise : $149\ 597\ 870.\ 10^3$ m , arrondie à $149,6\ .10^9$ m
- Densité solaire : 1408 kg / m^3
- Période orbitale terrestre : 1 an sidéral = 31 558 149, 7632 s arrondi à 31 558 150 s.

T^2 sera donc retenu à $995\ 916\ 831.\ 10^6\ s^2$, arrondi à $995917.\ 10^9\ s^2$.

Le rapport des rayons : distance Terre –Soleil / rayon Soleil est de :
$149,6.\ 10^9$ m / $696.\ 10^6$m = 214,942
Elevé au cube, on obtient : $214,94^{\ 3} = 9930056,822$ arrondi à 9930057.

La densité de ce Soleil est de : 1408 / 9930057 = 0,000141792 kg/m^3 soit $1417,92.\ 10^{-7}$ kg/m^3

Nous calculons dT^2 : $1417,92.\ 10^{-7}\ kg/m^3\ .\ 995917.\ 10^9\ s^2 = 14121,306.10^7\ kg.m^{-3}.s^{-2}$
"2G" = $3\pi/dT^2 = 9,4248/\ 14121,3.\ 10^7 kg.m^{-3}.s^{-2} = 6,674173.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
L'écart est de $1,648\ .10^{-5}$ par rapport à la valeur moyenne du G officiel.
J'ai mis le label « 2G » entre guillemets, car nous voyons immédiatement que la valeur trouvée correspond à G et non pas « 2G ».
La formule est donc à rectifier ; elle devra s'écrire : **$G\ dT^2 = 3\pi$**

Cette formule provenait de la troisième loi de Képler : $R^3/T^2 = 2GM_o/\ 4\pi^2$
Développée, elle s'écrit : $R^3/T^2 = 8\pi GdR^3/\ 12\pi^2$
Soit : $12\pi^2R^3 = 8\pi GdR^3T^2$

En simplifiant par $4\pi R^3$, il vient : $2G\ dT^2 = 3\pi$; remplacé dorénavant par $G\ dT^2 = 3\pi$
Cela implique que la troisième loi de Képler devient : $\mathbf{R^3/T^2 = GM_o/\ 4\pi^2}$

Nous allons voir que cette modification (passage de 2G à G) va porter sur une série de formules. Mais nous y reviendrons au fur et à mesure de leur rencontre.

A noter que l'on peut changer l'écriture de dT^2 de manière à la rendre plus « éloquente » : en passant de la puissance 7 à la puissance 11, les unités exprimées seront l'inverse de celles de $G = 6{,}67428.\ 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$; alors dT^2 devient : $1{,}4121306.\ 10^{11}.kg.m^{-3}.s^2$.

donc $G = 3\pi/\ dT^2 = 9{,}4248/\ 1{,}4121306.10^{11}.kg.m^{-3}.s^2 = 6{,}674173.10^{-11}.m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, calculé ici.

A l'inverse, on peut s'appuyer sur le G « officiel » pour avoir le dT^2 correspondant :
$dT^2 = 3\pi/\ G = 9{,}4248/\ 6{,}67428\ m^3.kg^{-1}.s^{-2} = 1{,}412107373\ .10^{11}.\ kg.m^{-3}.s^2$. Celui-ci nous servira de base de comparaison également. Le G calculé est à 2.10^{-5} du G officiel moyen.

Nous allons donc aborder une série d'exemples.

Mais auparavant, je désirerais rappeler que ce nouveau chapitre étant ouvert sur « l'accusation » d'être un créateur « d'avalanches d'équations », je voudrais éviter ce travers. En conséquence je ne citerai que les résultats, les calculs étant à la disposition de ceux qui le désireront.

Mes calculs étant effectués avec une calculette (de terminale, certes) risquent d'être moins précis qu'un contrôle par de grosses machines.

Les autres exemples seront donc :

- Le couple Terre-Soleil (par $G = RV^2/\ Mo$)

- Un satellite terrestre (par $G = 3\pi/dT^2$)

- La relation Terre-Lune (par $G = 3\pi/dT^2$)

- Le Soleil comme Trou Noir (par $G = 3\pi/dT^2$)

- Le Soleil comme Trou Noir (par $G = RV^2/\ Mo$)

- La circonférence d'un trou noir égale à 300 000 km (par $G = 3\pi/dT^2$)

- Le rayon de la sphère égal à un Mégaparsec (par $G = 3\pi/dT^2$)

- Le « rayon » de l'Univers égal à $13{,}7.10^9$ années-lumière.

- Les vitesses stellaires dans les galaxies spirales (dont la Voie Lactée)

- La constante G de Planck.

- Les satellites « galiléens » de Jupiter

Enfin nous apprécierons les conséquences du « passage » de 2G à G sur certaines formules.

Exemple 2 : le couple Terre-Soleil (deuxième partie)

Nous gardons bien sûr les mêmes valeurs de distance et de masse solaire.

La vitesse orbitale terrestre moyenne est de 29,783 km/s, soit 29783 m/s.

On utilise la formule $G = RV^2_T / Mo$.

Donc $G = 8{,}87.10^{8}$ m²/s² . 1,496. 10^{11} m / $1{,}9891.10^{30}$kg
$G = 6{,}671321 .10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ (soit à $4{,}4.10^{-5}$ du G officiel moyen)

Dans l'exemple 1, le dT² a été calculé à $1{,}4121306.10^{11}\ kg.m^{-3}\ .s^2$
Ici il est à $dT^2 = 3\pi/G = 9{,}4248/ 6{,}671321.10^{-11} = 1{,}4127337.10^{11}\ kg\ .m^{-3}.s^2$

Exemple 3 : un satellite terrestre (au niveau de la mer...)

Nous utiliserons :

- Masse terrestre : $5{,}9736 . 10^{24}$ kg

- Rayon terrestre : 6378137m.

- Densité : 5515 $kg.m^{-3}$

- La formule $V^2 = GM / R$ avec le G officiel = 6,67428 $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, recalculé ensuite en théorie.

Nous obtenons alors :
- $V^2 = 62{,}5095996.10^6\ m^2.s^{-2}$; donc :
- V =7906 m. s^{-1}
- $T = 2\pi R / V = 40075017 / 7906 = 5068$ s.
- $T^2 = 5068^2 = 25684624\ s^2$
- $dT^2 = 5515\ kg.m^{-3} . 25684624\ s^2 = 1{,}416507.10^{11}\ kg.\ m^{-3}\ s^{-2}$

D'où le G issu de cette valeur de dT² :
$G = 3\pi/ dT^2 = 6{,}653549.10^{-11}\ m^3.\ kg^{-1}.s^{-2}$ (écart de $3{,}2.10^{-3}$ du G officiel moyen)
C'est paradoxalement un G « médiocre » que l'on note ici. Les paramètres initiaux semblent à affiner…

Exemple 4 : le couple Terre- Lune

Nous utiliserons :

- Vitesse lunaire moyenne : 1023 $m.s^{-1}$

- T = 27,32 j = 2360448 s (période lunaire) ; donc $T^2 = 5{,}571714761 . 10^{12}\ s^2$

- Circonférence de l'orbite : 2360448 s . 1023 $m.s^{-1}$ = 2414738304 m.

- Distance moyenne Terre-Lune : circ/ 2π = 384316638 m

Terre-Lune/ Rayon terrestre : 384316638 m / 6378137 m = 60,25
- (Terre-Lune / Rayon terrestre)^3 = 218711,26

- densité d = 5515 / 218711 = 0,025215924 kg.m^{-3} =2,5215924.10^{-2} kg.m^{-3}

- dT² = 2,5215924.10^{-2} . 5,571714761.10^{12} =1,4049593.10^{11} kg.m^{-3}.s^{-2}

- G = 9,4248 /1,4049593.10^{11} =6,70823.10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}

L'écart est de 5.10^{-3} avec le G officiel moyen, ce qui en fait un résultat encore « moyen ».

Exemple 5 : Le Soleil comme Trou Noir (première approche)

Nous allons utiliser GdT² = 3π
La vitesse terrestre moyenne sur son orbite est de 29,7 km/s, soit 29700 m/s
La vitesse de la lumière est retenue à 299792458 m/s
Nous posons alors :

R_T = distance Terre-Soleil = 149600000000 m = 1496.10^8 m

V_T = vitesse terrestre = 29,7.10^3 m/s

c = vitesse de la lumière = 299792458 m/s

Rs = rayon de Schwarzschild du Soleil

ds = densité du trou noir solaire.

Nous avons l'égalité : $R_T V_T^2 = Rs\, c^2$
Soit $Rs = R_T V_T^2 / c^2$ = 1496.10^8 m . 29700^2/299792458^2
D'où Rs =1468m.

Si Ro est le rayon solaire (696.10^6 m) et do sa densité, nous aurons :
$4/3\ \pi$ do Ro^3 = $4/3\ \pi$ ds Rs^3
Ro^3/ Rs^3 = (696.10^6)^3 / 1468^3 = 106,573579.10^{15}
ds = 1408 kg/m^3.106,573579.10^{15} = 150,0555997.10^{18} kg/m^3

La circonférence à l'horizon du trou noir est de :
1468m .2π = 9223,7376 m.

La période Ts est de : 9223,7376 m / 299792458 m/s = 3,0767.10^{-5}s.
Ts^2 est à : (3,0767.10^{-5})^2 = 9,46608289.10^{-10} s^2

Donc dsTs^2 = 150,0555997.10^{18} . 9,46608289.10^{-10} = 1,420438745.10^{11}kg.m^{-3}.s^2
G vaut donc: G = 3π/ dsTs^2 = 9,4248 / 1,420438.10^{11}= 6,635133006 m^3.kg^{-1}.s^{-2}
L'écart avec le G officiel est de 0,6 %

Exemple 6 : Le Soleil comme Trou Noir (deuxième approche)

Nous allons utiliser $G = RV^2 / Mo = Rs\ c^2 / Mo$
$Rs = 1468m$
$c^2 = (299792458\ m/s)^2 = 8{,}987551787.10^{16}\ m^2/s^2$
$Mo = 1{,}9891.10^{30}kg$

D'où $G = 1468\ m\ .\ 8{,}987551787.10^{16}\ m^2\ s^{-2}\ /\ 1{,}9891.10^{30}kg = 6{,}633012932^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

Nous obtenons alors $ds\ Ts^2 = 3\pi/G = 1{,}420892752.10^{11}\ kg.m^{-3}.s^2$

Exemple 7 : Trou noir d'une circonférence égale à « 300000 km »

Le rayon de Schwarzschild d'un tel objet est de :
$299792458\ m / 6{,}2832 = 47713{,}34002\ km = 47{,}71334.10^6\ m$

La masse du Trou Noir sera de :
$47{,}71334.10^6 / 1468 = 32502{,}27\ Mo$
$Rs^3 = (47{,}71334.10^6 m)^3 = 108622{,}4156.10^{18}\ m^3$

$4/3\ \pi\ Rs^3 = 454997{,}5744.10^{18}\ m^3$
$ds = 32502{,}27.\ Mo\ /\ 4/3\ \pi Rs^3 = 32502{,}27\ .\ 1{,}9891.10^{30}kg\ /\ 454997{,}5744.10^{18}\ m^3$
$= 1{,}4208925.10^{11}\ kg.m^{-3}$

$Ts = 1s$ donc $Ts^2 = 1s^2$

$dsTs^2 = 1{,}4208925.10^{11}kg.m^{-3}.s^2$

Et $G = 3\pi/\ dsTs^2 = 6{,}633014109.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

Nous remarquons que les exemples 5 et 6 (Soleil comme Trou Noir) et le 7 donnent des résultats qui s'écartent modérément de la valeur « officielle » de G , mais qui sont très cohérents entre eux. Nous tenterons une explication plus tard.

Exemple 8 : Rayon égal à 1 Mpc ($3{,}2616.10^6$ années-lumière)

Nous utiliserons $V^2 = G\ M_{Mpc} / 1\ Mpc$
V = H (constante de Hubble) est estimée actuellement à 72,2 km/s = 72200 m/s

Le Mégaparsec (Mpc) représente $3{,}2616.10^6$ AL $= 3{,}0641345.10^{22}m$.
M_{Mpc} représente la masse d'Univers de rayon 1Mpc.

Nous avons alors :
$$(72200\ m/s)^2 = 6{,}67428.10^{-11}m^3.kg^{-1}.s^{-2}\ .\ M_{Mpc}\ /\ 3{,}0641345.10^{22}\ m$$

Soit : $M_{Mpc} = (72200)^2\ .\ 3{,}0641345.10^{22} / 6{,}67428.10^{-11} = 2393{,}193406.10^{39}\ kg$

Soit, en masses solaires :
$2393,193406.10^{39} / 1,9891.10^{30} = 1203,153892.10^{9}$ Mo.

La densité $d_{Mpc} = M_{Mpc} / 4/3\pi\, R^3_{Mpc} = 2393,193406.10^{39} / 4/3\pi(3,0641345.10^{22})^3$

$d_{Mpc} = 2393,193406.10^{39} / 120,05072287.10^{66} = 19,93485212.10^{-27}$ kg.m^{-3}

$T_{Mpc} = 2\pi R_{Mpc} / H = 6,2832 . 3,0641345.10^{22}$ m / 72200 m.s^{-1} = $2,6665609.10^{18}$s
$T^2_{Mpc} = 7,110547176.\ 10^{36}\ s^2$

$d_{Mpc} .T^2_{Mpc} = 19,93485212.10^{-27} .7,110547176.10^{36} = 1,417477064.10^{11}$kg.m^{-3}.s^2

On calcule $G = 3\pi / d_{Mpc}.T^2_{Mpc} = 6,648996$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}
Le G calculé est assez différent du G officiel introduit dans le calcul initial.

Exemple 9: Le « rayon » égal à $13,7.10^9$ années-lumière.

Nous allons utiliser la constante de Hubble comme base de calcul : 72200 m.s^{-1}.Mpc^{-1}, soit 72,2km par seconde et par Mégaparsec ($3,2616.10^6$ années-lumière)

En admettant que la constante H soit...constante jusqu'à cette distance de $13,7.10^9$ AL (cela n'est pas du tout certain, car elle serait proportionnelle à la densité d'après la Relativité Générale) la vitesse d'expansion serait de :

$$72200.\ 13,7.10^9/ 3,2616.10^6 = 303,2683346.10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

Supérieure à c !! Si on suit Einstein, et donc que l'on refuse cette possibilité, on peut supposer que la vitesse sera c tout simplement, soit 299792458 m/s. Dans ces conditions, à l'origine H vaudrait :

$$H = 299792458.\ 3,2616.10^6 / 13,7.10^9 = 71372,42047 \text{ m/s} .$$

Bien sûr, ce chiffre moyen n'est là que pour suggérer que H a dû varier dans le temps !!
Et qu'il est peut-être en phase d'accélération…

En utilisant $V^2 = GMu / Ru$ on aura , en prenant c² comme vitesse :
$$299792458^{\,2} = 6,67428.10^{-11}.\ Mu /12,8705672.10^{25}\text{m}.$$
Soit $Mu = 17,33143117.10^{52}$ kg

On retrouve alors du : $du = Mu / 4/3\ \pi Ru^3$
$du = 19,40670.10^{-27}$ kg.m^{-3}
D'autre part, l'Univers étant supposé plat :
$$Tu^2 = 4\pi^2\ Ru^2/ c^2 = 727,638609.10^{34}\ s^2$$

Donc $duTu^2 = 1,412106582.10^{11}$ kg.m^{-3}.s^2

Et on obtient ainsi « une autre valeur » de G :
$$G = 9,4248 / 1,412106582.10^{11} = 6,67428374.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$$
C'est-à-dire que les confins de l'Univers nous offrent la valeur de G la plus exacte que l'on ait trouvé…

Exemple 10 : Vitesses stellaires dans la Voie Lactée.

Nous allons, grâce à dT^2, essayé de déterminer la densité et la masse galactiques, par 2 voies différentes.

- En utilisant $RV^2 = GM_{VL}$

M_L étant la masse de la Voie Lactée au « point de mesure », c'est-à-dire à la position du Soleil, soit à 30000 années-lumière du centre galactique. Compte-tenu de l'égalité des vitesses stellaires dans la Galaxie, soit 250 $km.s^{-1}$, on peut écrire :

$R = 30000$ AL $= 3.10^{20}$ m.
$(250.10^3)^2 = 625.10^8\ m^2.s^{-2}$
$RV^2 = 3.10^{20}.\ 625.10^8 = 1875.10^{28}\ m^3.s^{-2}$
$RV^2/G = M_{VL}$

Soit $1875.10^{28}/\ 6{,}67428.10^{-11} = 280{,}929.10^{39}$ kg

Soit en nombre de masses solaires :
$280{,}929.10^{39}/1{,}9891.10^{30} = 141{,}23.10^9$ Mo

Et comme nous sommes aux 3/5 du rayon galactique, en sachant que la masse est régulièrement répartie, la masse galactique totale sera de :
$141{,}23.10^{39}\ .\ 5/3 = 235{,}38.10^9$ Mo

Dans « A propos de dérivées » j'avais déjà fait une estimation de « $2{,}3.10^{11}$ Mo »

- En utilisant dT^2

La circonférence ayant pour rayon la distance R_{VL} entre le Soleil et le centre galactique s'écrit : $2\pi\ R_{VL} = 6{,}2832\ .\ 3.10^{20}$ m

Le temps de révolution du Soleil est de :
$18{,}8496.10^{20}$ m / 250000 $m.s^{-1} = 7539{,}84.10^{12}$ s.

Soit en nombre d'années : $7539{,}84.10^{12}$ / 31558149 = $238{,}9189.10^6$ années
$T^2 = (7539{,}84.10^{12})^2 = 56849187{,}23.10^{24}\ s^2$

On utilise le dT^2 issu du G officiel (soit $6{,}67428.10^{-11}$) qui est :
$dT^2 = 1{,}412107.10^{11}\ m^{-3}.kg.s^2$

On a $d = 1{,}412107.10^{11}\ /\ 56849187{,}23.10^{24} = 2{,}483952849.10^{-21}\ kg.m^{-3}$

M_{VL} , en supposant qu'il s'agit d'une sphère, s'écrit :
$M_{VL} = 4/3\ \pi d\ R^3 = 4{,}188\ .\ 2{,}483952849.10^{-21}\ .\ (3.10^{20})^3 = 280{,}87.10^{39}$ kg.

Soit, en nombre de masses solaires :
$280,87 .10^{39} / 1,9891.10^{30} = 141,207. 10^9$ Mo

Et, pour la totalité de la Galaxie :
$141,207. 5/3 = 235,34\ 10^9$ Mo

A noter que la technique précédente nous a fait trouver : $235,38.10^9$ Mo...

Exemple 11 : La constante G de Planck

Elle est structurée à partir des « unités naturelles » dues à Planck :

- Unité de longueur : $1,616.10^{-35}$ m. Elle est symbolisée par L_P

- Unité de masse : $2,177.10^{-8}$ kg. Elle est symbolisée par M_P

- Unité de temps : $5,391.10^{-44}$ s. Elle est symbolisée par T_P

$G = M_P^{-1}\ L_P^3\ T_P^{-2}$ ou encore $G = L_P^3 / M_P\ T_P^2$

En introduisant les valeurs des unités :

$G = (1,616.10^{-35}\ m)^3 / 2,177.10^{-8}\ kg . (5,391.10^{-44}\ s)^2$

$G = 4,22.10^{-105}\ m^3 /63,26989.10^{-96}\ kg.s^2$

$G = 6,6698398.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ (arrondi à $6,66984.10^{-11}$)

Nous allons supposer que, même à ce niveau la formule $GdT^2 = 3\pi$ reste valable.

Par contre, cela nous incite à introduire un concept de plus :celui de « densité de Planck » :d_P

Donc $d_P\, T_P^2 = 3\pi / G = 9,4248 / 6,66984.10^{-11} = 1,41304.10^{11}\ kg.m^{-3}.s^2$

D'où $d_P = 1,41304.10^{11} / T_P^2 = 1,41304.10^{11} / (5,391.10^{-44})^2$
On trouve: $d_P = 486,23.10^{95}\ kg.m^{-3} = 48,6.10^{96}\ kg.m^{-3}$

Mais la table de Planck donne pour valeur : $d_p = M_p\, L_p^{-3} = 5,1.\ 10^{96}\ kg.m^{-3}$

S'il y a accord sur l'ordre de grandeur (10^{96}) par contre il existe un écart sensible « dans le détail »

L'examen de la table montre que π n'est jamais pris en compte dans l'écriture des constantes. En conséquence, il faut ré-écrire l'égalité (tout-au-moins ponctuellement , pour l'instant de Planck) :

$G\, d_p\, T_p^2 = 1$ soit : $d_p = 1/ GT_p^2$

On trouve alors : $d_p = 5{,}15862988.10^{96}$ kg.m^{-3}

Nous pouvons écrire l'égalité des expressions de d_p :

$$d_p = M_p L_p^{-3} = G^{-1} . T_p^{-2} = M_p L_p^{-3}\ T_p^2 . T_p^{-2} = M_p L_p^{-3}$$

Nous avons donc déjà 2 manières d'obtenir d_p .

La troisième est obtenue par la formule de la vitesse en général, ici celle de la lumière c :

$$c^2 = 4/3\ \pi\ G\ d_p\ L_p^2 = GM_p / L_p$$

Mais, comme pour la densité, nous allons supprimer 4/3 π; il vient :

$$c^2 = G\ d_p\ L_p^2 = G\ d_p\ L_p^3/ L_p$$

$8{,}991506.\ 10^{16}\ (L_p^2\ T_p^{-2}) = 6{,}66984.10^{-11}\ (M_p^{-1} L_p^3 T_p^{-2}).\ (1{,}616\ .10^{-35})^2\ (L_p^2)\ .\ d_p$

Soit : $d_p\ (M_p\ L_p^{-3}) = 8{,}991506.10^{16} /\ 6{,}66984.10^{-11}\ .\ 2{,}6114.\ 10^{-70}\ (M_p\ L_p^{-3})$

$$d_p = 5{,}162306.10^{96}\ \text{kg.m}^{-3}$$

De même :

$8{,}991506.10^{16} = 6{,}66984.10^{-11}\ .\ (1{,}616.10^{-35})^3\ .\ d_p\ / 1{,}616.10^{-35}$ donnera :

$$d_p = 5{,}162306.10^{96}\ \text{kg.m}^{-3}$$

NB : la formule $c^2 = G\ d_p\ L_p^2$ ressemble à une transformation de Tolman provenant de :
$c^2 / L_p^2 = G\ d_p$ (le terme 4/3 π étant abandonné) ce qui pourrait se traduire par :
« la vitesse d'expansion à l'instant de Planck est égale à celle de la lumière »

Si on introduit les unités, cela donne une égalité « exotique » :

$c^2 / L_p^2 = m^2.s^{-2} / m^2 = s^{-2}$
$G\ d_p = kg^{-1}.m^3.s^{-2}\ .\ kg.m^{-3} = s^{-2}$ soit :
$c^2 / L_p^2 = G\ d_p = 3{,}443.10^{86}\ s^{-2}$.
Mais comme c^2 / L_p^2 ressemble à une constante de Hubble, nous réintroduisons $m^2.s^{-2} / m^2$.

$c^2 / L_p^2 = 3{,}443.10^{86}\ m^2.s^{-2} / m^2$, ce qui est dans « l' esprit » de la constante de Hubble.
Nous l'appellerons H_p^2 par analogie. Soit : $H_p = 1{,}8555.10^{43}\ m.s^{-1} / m$: c'est la valeur de la constante de Hubble à l'instant de Planck. Un rapport avec l'inflation ??
A noter que L_p correspond exactement au rayon de Schwarzschild de la masse $M_{p.}$
En conséquence : $L_p\ c^2 = G\ M_p = 14{,}47355.10^{-19}\ m^3.s^{-2}$.

Exemple 12 : Les lunes « galiléennes » de Jupiter

Enfin, on ne peut pas ne pas évoquer les 4 corps célestes historiquement connu s : les lunes « galiléennes » de Jupiter. La planète comptant 63 satellites à ce jour, nous nous sommes contentés des 4 plus célèbres : Io, Europe, Ganymède et Callisto.

Les paramètres utilisés sont ceux de la littérature scientifique courante (Wikipedia). Nous retiendrons donc les rayons orbitaux et les périodes de révolution :

- Pour Io : 421800 km et 1,769d (Nous prenons d = durée du jour = 86400 s)
- Pour Europe : 671100 km et 3,551d.
- Pour Ganymède : 1070400 km et 7,155d
- Pour Callisto : 1882700 km et 16,689d

(NB : attention à la confusion possible entre d, la durée du jour, et d, la densité !!)

De plus, le rayon équatorial de Jupiter est de 71492 km et sa densité est de 1326 kg / m^3
Le calcul sera toujours le même. Je l'expose une fois avec Io :

Le rapport Rayon orbital / Rayon de Jupiter est de : 421800 / 71492 = 5,8999 arrondi à 5,9
J'élève ce chiffre au cube pour connaitre le volume relatif de la sphère ayant pour rayon le rayon orbital moyen : $5{,}9^3 = 205{,}379$

La densité de cette sphère est de :
1326 $kg.m^{-3}$ / 205,379 = 6,4566 kg / m^3

D'autre part :
T = 1,769d = 1,769. 86400 s = 152841,6 s.
$T^2 = 2{,}336055469.10^{10}$ s^2

Donc $dT^2 = 6{,}4566 \;.\; 2{,}336055469.10^{10} = 1{,}5082975.10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$

Pour Europe : $dT^2 = 1{,}50899.10^{11}$

Pour Ganymède : $dT^2 = 1{,}509816.10^{11}$

Pour Callisto : $dT^2 = 1{,}5095967.10^{11}$

Nous voyons donc que nous avons un résultat concernant les dT^2 des 4 satellites « homogène » , mais assez différent du résultat théorique issu de $G = 6{,}67428.10^{-11}$ officiel, qui est de $1{,}412107.10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$.

Pour retrouver cette valeur, il faut modifier le calcul des dT^2 : et puisque les T^2 sont fournis par l'observation, c'est à la densité qu'il faut s'intéresser, donc à la valeur du rayon orbital moyen des satellites.

Ainsi, pour satisfaire à $dT^2 = 1{,}412107.10^{11}$, nous devons porter les rayons orbitaux moyens à :

- Pour Io : de 421800 km à 431105,65 km (soit 9305 km de plus)

- Pour Europe : de 671100 km à 686013 km (soit 14913 km de plus)

- Pour Ganymède : de 1070400 km à 1094388,8 km (soit 23988,8 km de plus)

- Pour Callisto : de 1882700 km à 1925067,9 km (soit 42367,9 km de plus)

Mais ceci n'est qu'un calcul théorique pour « idéaliser » les résultats, c'est-à-dire les faire concorder avec $dT^2 = 1{,}412107.10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$.

Cette discordance entre les rayons théoriques et ceux mesurés étant importante, nous allons changer notre approche : nous allons calculer le rayon idéal d'un Jupiter parfaitement sphérique.

Pour cela, nous prenons en compte la masse de la planète ($1{,}8986.10^{27}$ kg) que nous divisons par sa densité ou masse volumique (1326 $kg.m^{-3}$) : nous obtenons $4/3\ \pi\ R^3$, le cube du rayon théorique idéal. La racine cubique donne : 69919,789 km.

Pour Io comme exemple, le rapport distance/rayon idéal donne :

421800 / 69919,789 = 6,032627 qui, élevé au cube donne :219,54296

La densité de Jupiter au niveau de Io est donc :

1326 / 219,54296 = 6,039820179 $kg.m^{-3}$

$dT^2 = 6{,}039820179 \,.\, 2{,}336055469.10^{10} = 1{,}410935.10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$

A partir d'un résultat idéal de $1{,}412107.10^{11}$, on recalcule la distance de Io à 421684,004 km. Sur les mêmes principes de calcul, nous allons trouver :

- Pour Europe :
  - $dT^2 = 1{,}41159722.10^{11}$
  - Avec $dT^2 = 1{,}412107.10^{11}$ la distance devient 671020,344 km au lieu de 671100 km.

- Pour Ganymède :
  - $dT^2 = 1{,}41238172.10^{11}$
  - Avec $dT^2 = 1{,}412107.10^{11}$ la distance devient 1070471,179 km au lieu de 1070400 km.

- Pour Callisto :
  - $dT^2 = 1{,}41217471.10^{11}$
  - Avec $dT^2 = 1{,}412107.10^{11}$ la distance devient 1882730,091 km au lieu de 1882700 km.

Il semble donc que ce soit sur le « rayon idéal » qu'il faille se baser pour un « bon calcul » de dT^2. Ce rayon fournit une « densité idéale » qui s'accorde le mieux avec le « dT^2 idéal »

Commentaires :

- La formule « $G\ dT^2 = 3\pi$ » semble être une réalité.

Puisque 3π est un nombre « pur, sans dimension », il était nécessaire que G et dT^2 soient exprimés en « unités inverses », ce qui est le cas :

G s'exprime en $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

dT^2 s'exprime en $kg.m^{-3}.s^2$

Aussi diverses soient les masses volumiques (ou densités) (de celle d'un trou noir à celle de l'Univers, en passant par toutes les valeurs intermédiaires possibles) et les périodes correspondantes, la conjonction de dT^2 représente une valeur voisine de $1,4121073.10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$, obtenue par la formule $dT^2 = 3\pi / G$; G a ici sa valeur « officielle » correspondant à $6,67428.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$. J'ai simplement pris $\pi = 3,1416$ (soit $3\pi = 9,4248$)
En tenant compte qu'officiellement $G = (6,67428 \ +/- \ 0,00067).10^{-11}$, nous avons donc 2 valeurs extrêmes de G :

$G = 6,67495.10^{-11}$ d'où $dT^2 = 1,411965633.10^{11}$
$G = 6,67361.10^{-11}$ d'où $dT^2 = 1,412249133.10^{11}$

D'où $dT^2 = 1,412107388 \ (+/- \ 0,000141755) .10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$

Cependant, il faut remarquer que la manière d'aborder le problème peut affiner le résultat.

Ainsi, dans l'exemple 3 (satellite terrestre) si on considère la Terre comme une sphère parfaite, on lui trouve un rayon de 6370893,248 m, une circonférence de 40029596,45 m , et en utilisant $V^2 = GM / R$, on trouve $V = 7910,794$ $m.s^{-1}$; $T = 5060,12s$, d'où :
$dT^2 = 1,4121073.10^{11}$ $kg.m^{-3}.s^2$, soit strictement la valeur de $3\pi/G$, avec $G = 6,67428.10^{-11}$.

Aussi, dans l'exemple 2 (relation Terre- Soleil), pour trouver $G = 6,67428.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, Il faut prendre la distance exacte Terre-Soleil, soit 149597870 m, et la vitesse terrestre recalculée à 29789,815 $m.s^{-1}$, soit un écart de 6,81 $m.s^{-1}$ avec la moyenne proposée à 29783 $m.s^{-1}$. Plus les chiffres initiaux seront précis, plus on se rapprochera du résultat idéal.

Ainsi, aussi divers soient les exemples pris, il semble bien que « la constante gravitationnelle G » soit effectivement constante, indépendante des « circonstances » de temps et de lieu. Elle est dans le droit-fil de la Théorie de la Relativité Générale , qui suppose un Univers isotrope et homogène, où les lois de la Physique sont identiques partout, et de la conception fractale de l'Univers. En conséquence, dT^2 qui est son pendant, peut être considéré comme constant. A noter qu'à l'instant de Planck , 2 des « constantes » (soit c et G) sont bien retrouvées immuables ; mais pas la « constante de Hubble » qui - comme prévu – varie en fonction de la densité.

-**Comme on l'a vu, les formules en « 2G » doivent être rectifiées en « G »**, pour que les calculs soient en accord avec la formulation .
Ainsi :

$2GdT^2 = 3\pi$ devient $GdT^2 = 3\pi$.

$V^2 = 2GM/R = 8\pi GdR^2/3$ devient $V^2 = GM/R = 4\pi GdR^2/3$

$V^2/R = 2GM/R^2 = 8\pi GdR/3$ devient $V^2/R = GM/R^2 = 4\pi GdR/3$

$V^2/R^2 = 8\pi Gd/3$ devient $V^2/R^2 = 4\pi Gd/3$

Et, comme la formule du comportement de l'Univers d'Einstein est la copie-conforme de la précédente, on écrira :

$$\mathbf{R'^2/R^2 + k/R^2 = 4\pi Gd/3 + \lambda/3 \quad avec \quad \lambda = - 4\pi Gd'/3}$$

La troisième loi de Képler s'écrira :

$R^3/T^2 = GM/4\pi^2$ et donc $RV^2 = GM$

La « loi » d'Archimède s'écrira :

$R_R = 4\pi GdR^2(d_1 - d_o) /3$

Par contre, rien de changé dans la conclusion que V^2 est la projection sur les 3 axes du référentiel (Ox, Oy et Oz) du vecteur $3V^2$, à part que l'intégrale s'écrit différemment ; en effet, avec $3V^2 = 4\pi GdR^2$, nous avons :

$$\Sigma_o^R \, 4\pi GdR^2 = 4\pi GdR^3/3 = GM$$

$$R^3/T^2 = GM/4\pi^2 \text{ entraine } G = 4\pi^2R^3/MT^2 = 4\pi^2R^3/ 4/3\pi dR^3T^2 = 3\pi/dT^2$$

Et on retrouve donc : $\mathbf{GdT^2 = 3\pi}$

-**A partir de cette formule, si on choisit d , c'est la valeur fixe de G** qui donnera automatiquement T^2, quels que soient le lieu ou l'époque choisis.

A l'inverse, un temps de révolution T impose une densité d moyenne.

Enfin dT^2 étant fixe, la variation de $d(t)$ (variation de densité à travers le temps) impose un ajustement contemporain de $T^2(t)$, à l'exclusion de la nécessité de toute modification de G.

-**A propos de l'approche de Planck :**

En utilisant les unités « naturelles » de Planck, on obtient une valeur de G voisine de celle qui a été mesurée et sert de référence.

Mais en utilisant cette valeur théorique de G et le temps de Planck, on peut déduire alors une « densité de Planck » théorique, à comparer à celle de Planck .

Ainsi en appelant le G théorique G_p , le dT^2 théorique $d_pT_p^2$, on obtient :

$$G_p = 6{,}66984.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

$$d_pT_p^2 = 1{,}41304.10^{11}\text{m}^{-3}.\text{kg.s}^2$$

On calcule alors $d_p = 4{,}86249.10^{97}$ kg.m^{-3}

Mais les unités de Planck ne comportant pas π, il faut écrire ici :
$G\ d_p\ T_p^2 = 1$
Ce qui donne : $d_p = 5{,}15925.10^{96}$ kg.m^{-3} ; identique à celle de Planck.

Enfin, on notera qu'à l'instant de Planck, des « constantes » le restent et d'autres non, ce qui justifie d'aller contrôler ces caractéristiques à ce niveau.

D'autre part, les caractéristiques de l'Univers à l'instant de Planck sont celles d'un trou noir…

Ce chapitre est fini. Son but était d'essayer de montrer que sous une apparence un peu hermétique, une formule peut recéler des éléments intéressants, pour peu que l'on veuille bien lui accorder a priori l'attention qu'elle mérite…a posteriori .