A PROPOS DE DERIVEES

Ce chapitre est le plus récent, datant de 2006 et 2007.
Je l'ai jugé nécessaire à une précision, à la suite de la controverse née d'une petite phrase relevée au tout début du synopsis disant : « R'^2 est la dérivée de la masse (de l'Univers) en fonction de son rayon »
Je croyais ce concept acquis, compte-tenu du caractère extrêmement sérieux de la source (1).
J'ai choisi d'appeler la densité d plutôt que ρ pour une raison pratique (d_u pour l'Univers)
Pages 179 et suivantes, évoquant les modèles d'Univers, sont exposées les Equations des Cosmologies, exprimées en fonction de la pression p et de la densité d_u de l'Univers en expansion. On y déclare qu'à nôtre époque, à la température de 3°K, on peut considérer que la pression p = 0 (pas de chocs nombreux entre galaxies) et donc que seule est à prendre en compte en pratique la formule fonction de d_u.
Celle-ci s'écrit :

$$R'^2/R^2 + k/R^2 = 8 \pi G d_u/3 + \lambda /3 \text{ où :}$$

- R représente la valeur de la fonction R(t) à l'instant (t)
- R' est la dérivée première de R(t) donc la vitesse d'évolution du rayon (ou de la distance) ; R'^2 sera donc le carré de cette vitesse.
- k fixe le type géométrique de l'Univers, elliptique, parabolique ou hyperbolique.(dans l'exposé «La gravitation ; Comportement fractal de l'Univers » il sera supposé sans incidence sur la matière au niveau local, donc négligé) Actuellement, il est évalué à zéro. De même, nous négligerons dans ce chapitre la constante cosmologique λ.
- La formule devient alors :

$$R'^2/R^2 = 8 \pi G d_u / 3$$

« Les Equations des Cosmologies où R' et R" représentent les dérivées première et seconde de R(t) admettent pour intégrale première:

$$G\, \delta(d_u R^3)/\delta R + 3 pR^2 = 0$$

L'Univers est un gaz de galaxies, baignant dans un rayonnement thermique (le 3^o K).Sa partie matérielle (gaz de galaxies) a pour équation d'état p = 0 (pas de chocs nombreux entre galaxies).Il en résulte, d'après la formule précédente, la loi de densité de matière d_u suivante :

$$G\, d_u R(t)^3 = \text{constant}$$ » (fin de citation)

:
Si l'on réécrit l'équation des cosmologies suivant TOLMAN il vient :

$$R'^2=8 \pi G d_u R^2/ 3 =2 GM_u /R$$, fonction équivalente qui est appelée potentiel de gravitation ψ dans le cas d'une masse M_u prise « isolément ».

L'intégrale de cette fonction sera en R :

$$\Sigma_o^R 8 \pi G d_u R^2 = 8\pi G d_u R^3/ 3 =2G .4\pi d_u R^3 / 3= 2 GM_u = R.R'^2$$

Nous constatons donc que R'^2 est le carré de la vitesse d'évolution de R(t),mais qu'il est aussi la dérivée partielle de 2 GM_u en fonction de R, produit de la masse de l'Univers et de

(1) « La Galaxie, l'Univers extragalactique » Bureau des Longitudes (Ed. Gauthier-Villars 1980)

la constante gravitationnelle, indifféremment traduite par une formule de gaz de galaxies ($8\pi G\, d_u R^2/3$) ou une formule matérielle ($2GM_u/R$) appelée potentiel de gravitation ψ de la masse M_u .

Mais nous savons aussi que, pour un satellite tournant à une distance R d'une masse (comme le Soleil M_o) le carré de sa vitesse V^2 s'exprime par :

$$V^2 = 2GM_o / R \quad \text{d'où} \quad RV^2 = 2GM_o$$

On peut noter l'identité de formule entre R'^2 et V^2, toutes deux dérivées de masses, même si leur signification apparente est différente.

Par extension, à des distances R_1 , R_2 et à R_S (rayon de Scharzschild des trous noirs) et déduction de la troisième loi de Képler, on écrit :

$$R_1V_1^2 = R_2V_2^2 = R_S\, c^2 = 2GM \text{ (pour une masse M quelconque)}$$

Le deuxième argument est purement d'ordre mathématique (2)

Dans le chapitre « Analyse » pages 102 et 103, il est précisé que l'on appelle « intégrale » d'une fonction $Y = X^m$ la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la verticale élevée depuis le point X considéré et coupant bien sûr la courbe en une ordonnée X^m .

La valeur de cette surface est égale à (cf figures 1 et 2)

$$\Sigma o^x X^m = X^{m+1}/m+1$$

Soit, si l'on trace la courbe $8\,\pi G\, d_u R^2$, son intégrale sera égale à $8\,\pi G\, d_u R^3/3$ .Autrement dit :

R'^2 est la dérivée de $2\,GM_u$ en R, ou ce qui revient au même :$2GM_u$ est l'intégrale de R'^2 en R. Ainsi, l'hypothèse d'un comportement fractal de la matière permet de constater que, d'une manière générale, R'^2 et V^2 représentent la dérivée de la masse considérée, qu'il s'agisse d'un objet isolé (Soleil par exemple) ou de sa totalité dans une approche simplifiée (Univers)

Dans le cas du Soleil pris isolément, $2GM_o/R$ représente son potentiel gravitationnel ψ évalué à la distance R de son centre.

Cependant, s'il est possible de concevoir d'être « à l'intérieur » du Soleil pour voir la genèse progressive du champ du centre à la surface suivant la courbe parabolique de V^2, puis d'en être « à distance » pour mesurer V^2 suivant l'hyperbole $2GM_o/R$,il est par définition impossible de se retrouver « en dehors » de l'Univers pour observer cette hyperbole. Seule la fonction parabolique nous est accessible ici. A moins de considérer chaque parcelle d'espace successive contenant des masses M croissantes comme des entités de même densité d_m à la surface desquelles nous serions placés, les champs successifs étant représentés par les valeurs croissantes de la fonction 2GM/R, c'est-à-dire de R'^2.

Dans la formule de Hubble : $H = R'(t) / R(t)$

Soit, en élevant au carré : $H^2 = R'^2(t) / R^2(t) = R'^2/ R^2 = 8\pi G\, d_u/3$

Et comme la constante de Hubble s'écrit aussi : $cz = HR$ avec

c = vitesse de la lumière

z = décalage vers le rouge

R = distance de la galaxie mesurée

On a alors : $H^2.R^2 = R'^2 = 8\pi G d_u R^2/3 = c^2z^2 = 2GM_u/R$

Le décalage vers le rouge est donc fonction de la masse de la portion d'Univers considérée, à la distance R de la mesure, la densité d_u étant déclarée inchangée si la valeur de R (donc le temps) est modeste par rapport à la dimension (donc l'age) de l'Univers.

On peut également écrire : $z^2 = 2GM_u/Rc^2$

(2) Encyclopédie des Mathématiques (Editions Bordas 1985)

Il est curieux de constater que cette formule est également celle de la déviation des rayons lumineux dans un champ gravitationnel « ponctuel » se déplaçant (type Soleil)

α(rad) = 2GM /Rc² où :

M est la masse déviante (le Soleil par exemple)
R est la distance au centre de M

Si l'on divise la formule de H²R² par R, il vient :
$H^2.R(t) = R'^2(t) / R(t) = 8\ G\ d_u(t)\ R(t) / 3 = c^2z^2 / R(t) = 2GM_u / R^2(t) = \gamma\ (t)$ (accélération au temps (t) ou pour la portion d'Univers considérée)
Plus on observe loin dans le temps, plus le rayon de l'Univers est petit, plus sa densité est grande, ainsi que son accélération : donc H².R(t) grandit avec la diminution de R(t), suggérant une constante H…variable à grande échelle de temps.

LES AUTRES DERIVEES SUCCESSIVES DE R'²

- Comme nous avons vu que R'² (ou V²) est la dérivée de 2GM par rapport à R, on peut également envisager une dérivée de R'²(ou V²) par rapport à R.(cf figure 2)
Si l'on trace la fonction $y = 8\ \pi Gd2R/3$ (qui est une droite) son intégrale sera :

$$\Sigma_0^R\ 8\pi Gd2R/3= 8\pi GdR^2/3 = V^2$$

Mais en physique la dérivée de R'² (ou V²) est égale à $8\pi GdR/3 = V^2/R$ qui est l'accélération γ.
-De même, la dérivée de $8\pi GdR/3$ sera représentée par $8\pi Gd/3$, c'est-à-dire la densité.
Au total, on peut résumer en constatant que :

- La masse est représentée par $2GM = R\ .V^2 = R\ .R'^2 = 8\pi Gd\ R^3/3$
- Sa dérivée est la vitesse au carré : $2GM/R = V^2 = R'^2 = 8\pi GdR^2/3$
- La dérivée de la vitesse est l'accélération : $2GM/R^2 = V^2/R = \gamma = R'^2/R = 8\pi GdR/3$
- La dérivée de l'accélération est la densité : $2GM/R^3 =V^2/R^2 = \gamma /R = R'^2/R^2 = 8\pi Gd /3$

Nous allons garder en mémoire la formule reliant la courbure de l'espace C et la densité d :

$C = kd$ avec $k = G/c^2$

REPRESENTATIONS ET APPLICATIONS

fig 1 :l'intégrale de la fonction R'² est égale à $2GM_u$ (ou 2GM pour V²)
fig 2 :l'intégrale de la fonction γ est égale à R'² ou V²
fig 3 : Relation vitesse-distance pour une masse donnée 2GM

- Première application : la troisième loi de Képler -

Elle soutient que, pour un cortège de planètes comme dans le Système Solaire :
$R_1^3 /T_1^2 = R_2^3 /T_2^2 = R_3^3/T_3^2 = 2GMo$
R étant les distances par rapport au Soleil Mo et T les périodes de révolution de ces planètes.
Pour la planète située en R_1, on peut écrire avec une vitesse orbitale V_1, en supposant une trajectoire pratiquement circulaire pour simplifier l'approche :

$2\pi R_1 = T_1 V_1$ soit :

$4\pi^2 R_1^2 = T_1^2 V_1^2$ soit : $R_1^2 = T_1^2 V_1^2/4\pi^2$

$R_1^3/T_1^2 = R_1.R_1^2/T_1^2 = R_1.T_1^2 V_1^2/T_1^2.4\pi^2$ soit :

$R_1^3/T_1^2 = R_1 V_1^2/4\pi^2$ D'après la relation vitesse-distance que nous venons de voir (fig 3)

$R_1V_1^2 = R_2V_2^2 = R_S c^2 = 2GMo$ ou :

$R_1.R'_1{}^2 = R_2.R'_2{}^2 = Rs\, c^2 = 2GMo$ ou encore :

$R'_1{}^2 = 2GMo / R_1 = V_1^2$ et $R'_2{}^2 = 2GMo / R_2 = V_2^2$ (équivalence champ-vitesse)

De manière générale, la troisième loi de Képler permet donc de connaître la masse de l'étoile autour de laquelle tourne une planète à distance et vitesse (ou période de révolution) connues. Mais pas son volume…

La surface de la sphère représente en effet l'interface entre la parabole $8\pi Gd R^2/3$ de création du champ et l'hyperbole 2GMo/D d'extension du champ , le point où , après que l'intégrale de R'² ait atteint son maximum 2GMo à la surface R (c'est-à-dire le champ gravitationnel maximum) ce champ va décroître en 2GMo/D avec la distance D du point de mesure par rapport au centre de la sphère.

Ainsi, les courbes obtenues (cf « La gravitation ») montrent qu'être à une distance R_1 d'un Soleil de masse M_0 , de rayon R_0 et de densité d_0 équivaut à être à la surface de ce même Soleil de rayon R_1 et de densité d_1 ; le champ gravitationnel s'exprime de la même manière :

$R'^2(M_0 ;R_0) = 2GM_0 / R_0 = 8\pi G\, d_0 R_0^2/3$

$R'^2(M_0; R_1) = 2GM_0 / R_1 = 8\pi G\, d_1 R_1^2/3$ (cf fig 4)

- Deuxième application: les lois de Newton -

Soit 2 planètes de masses M_1 et M_2 à des distances respectives R_1 et R_2 d'un Soleil de masse M_0.

On peut donc écrire la force de Newton de 2 manières différentes mais égales ; pour M_1 :

$F_1 = 2GM_0 M_1 /R_1^2 = M_1.\ 2GM_0/R_1^2 = M_1.\ V_1^2/R_1 = M_1.\gamma_1$

Avec $V_1^2/R_1 = \gamma_1$, soit l'accélération à laquelle est soumise la masse M_1 en R_1 de la part du Soleil.

Comme M_1 est négligeable vis-à-vis du Soleil M_0 (une planète différente subirait également la même accélération) on peut simplifier l'égalité ; il vient :

$2GM_0 / R_1^2 = V_1^2/ R_1$ soit

$2GM_0 = R_1^2 V_1^2/ R_1 = R_1V_1^2$

Et avec M_2 en R_2 , suivant le même développement :

$2GM_0 = R_2^2 V_2^2/ R_2 = R_2V_2^2$

Et on retrouve : $R_1V_1^2 = R_2V_2^2 = R_3V_3^2 = 2GM_0 = Rs\, c^2$ pour un cortège de planètes

Les dérivées respectives sont

$2GM_0 / R_1 = V_1^2 = R'^2(M_0 ;R_1)$ et $2GM_0 / R_2 = V_2^2 = R'^2(M_0 ;R_2)$

Enfin $2GM_0 / Rs = c^2 = R'^2(M_0 ; Rs)$ au rayon de Schwarzschild

Les accélérations s'écrivent :

$2GM_0 / R_1^2 = V_1^2/ R_1 = R_1'^2/R_1 = \gamma_1$ et :

$2GM_0 / R_2^2 = V_2^2/ R_2 = R_2'^2/R_2 = \gamma_2$ enfin :

$2GM_0/ Rs^2 = c^2 / Rs = Rs'^2/Rs = \gamma_s$

Dans ces conditions, on peut ré-écrire la première formule de la force de Newton :

$$F_1 = M_1 \,.\, 2GM_0 / R_1^2 = M_1 \,.\, V_1^2/R_1 = M_1.\, \gamma_1$$

$$F_2 = M_2 \,.\, 2GM_0 / R_2^2 = M_2 \,.\, V_2^2/ R_2 = M_2.\, \gamma_2$$

Aussi : $F'_2 = M_1 \,.\, 2GM_0 / R_2^2 = M_1 \,.\, V_2^2/ R_2 = M_1.\gamma_2$ si on suppose M_1 positionné en R_2 .

- Troisième application :l'Equation de Poisson –

Elle décrit les potentiels de gravitation d'un point P par rapport aux 3 directions orthogonales Ox, Oy et Oz de l'espace tridimentionnel , à des distances x , y et z par rapport à P, dans un milieu de densité homogène ρ (je reprends transitoirement ce symbole de densité)

$$\delta^2\psi / \delta x^2 + \delta^2\psi / \delta y^2 + \delta^2\psi / \delta z^2 = - 4\pi G \rho$$

« Le choix du coefficient $8\pi G/c^4$ pour le tenseur impulsion-énergie a été fait de manière à retrouver l'équation de Poisson comme un cas particulier des équations d'Einstein. » (1)
$F'' = -4\pi G\rho$ représente la dérivée de $F' = \delta F/\delta x$ dont l'intégrale est le potentiel gravitationnel dans chacune des directions.
Nous avons donc suivant chacune des directions, d'après une transformation de Tolman :

$$\delta^2\psi_x = - 4\pi G \rho.\delta x^2$$
$$\delta^2\psi_y = - 4\pi G \rho.\delta y^2$$
$$\delta^2\psi_z = - 4\pi G \rho.\delta z^2$$

En supposant que le milieu est isotrope, qu'il n'y a donc aucune direction particulière, que la symétrie est simplement de type sphérique, on peut considérer que les segments Px, Py et Pz peuvent être portés de manière unidirectionnelle sur la droite des abscisses représentant des longueurs successives x, y et z en supposant arbitrairement $x<y<z$
Nous avons alors une parabole avec un coefficient directeur de $- 4\pi G \rho$, et des valeurs successives des potentiels gravitationnels en x, y et z proportionnels à x^2, y^2 et z^2.Les intégrales respectives représentent des masses M_x, M_y et M_z avec :

$$2GM_x = 8\pi G \rho\, x^3 /3 \;; \quad 2GM_y = 8\pi G \rho\, y^3 /3 \;; \quad 2GM_z = 8\pi G \rho\, z^3 /3$$

Ces 3 sphères sont concentriques à partir du point P (cf fig 5)
Cependant, dans l'Equation de Poisson, il s'agit d'une addition de 3 éléments en ce qui concerne le terme de gauche. Compte-tenu que ces 3 éléments sont égaux (ils représentent la dérivée seconde des 3 champs) on peut écrire :

$$\delta^2\psi_x / \delta x^2 = \delta^2\psi_y / \delta y^2 = \delta^2\psi_z / \delta z^2 = -4\pi G \rho /3$$

Et la somme de ces 3 termes donnera :

$$\delta^2\psi_x / \delta x^2 + \delta^2\psi_y / \delta y^2 + \delta^2\psi_z / \delta z^2 = - 4\pi G \rho \,.3/3 = - 4\pi G \rho$$

Et l'on retrouve ici l'Equation de Poisson.

Ceci amène aussi à constater que le coefficient directeur de la parabole devient $- 4\pi G \rho / 3$

-Quatrième application : la courbure de l'espace

Soit pour 2 valeurs très voisines R_1 et R_2 de R d'une courbe parabolique – $8\pi G\, d\, R^2/3$ les valeurs $R_1'^2$ et $R_2'^2$ des champs (et des vitesses) respectifs. On appellera tangente α le rapport entre sinus $\alpha = R_2'^2 - R_1'^2$ d'une part, et cosinus $\alpha = R_2 - R_1$ d'autre part. L'angle α correspond donc à l'angle déterminé par la parabole, et l'horizontale passant par $R_2'^2$.

On écrira : $\tan \alpha = \sin \alpha/\cos \alpha = R_2'^2 - R_1'^2/ R_2 - R_1 = \delta R'^2/ \delta R$

$\sin \alpha = 8\pi G\, d\, R_2^2/3 - 8\pi G\, d\, R_1^2/3 = 8\pi G\, d /3\, (R_2^2 - R_1^2) = 8\pi G\, d /3\, (R_2 + R_1)\, (R_2 - R_1)$

En simplifiant par $(R_2 - R_1)$ qui est > 0

$\tan \alpha = \sin \alpha /\cos \alpha = 8\pi G\, d\, (R_2 + R_1) /3 = 8\pi G/3.d\, .2R_m$ (en appelant R_m la valeur moyenne entre R_1 et R_2)

On peut aussi écrire : $\tan \alpha = 8\pi/3\, .\, 2G\, d\, R_m$

Or l'intégrale de $\tan \alpha$ sera : $8\pi/3\, .\, G\, d\, R_m^2 = R'^2_m$

Ainsi, la $\tan \alpha$ est la dérivée de V_m^2,elle représente donc l'accélération V_m^2/R_m

Nous aurons donc sur le même graphique (figure 6)

- La surface $S_1 = 2GM$ représentant la masse de rayon R_m
- La parabole en $R_m{}^2$ à coefficient directeur $-8\pi Gd /3$ représentant $V_m^2 = R'^2_m$, dérivée de 2 GM.
- La $\tan \alpha$ en R_m représentant l'accélération V_m^2/R_m (figure 7)

Dans le chapitre « La gravitation » page 18 , nous avions évalué la valeur de la tangente au rayon de Schwarzschild d'un trou noir et avions trouvé :

$\tan \alpha = c^2 / Rs$

La similitude est donc totale entre les deux formules : c^2/ Rs et V_m^2/ R_m représentent la $\tan \alpha$, ç'est-à-dire l'accélération au rayon de Scharzschild d'une part , en R_m d'autre part.

Par ailleurs, en reprenant la formule de la courbure de l'espace :

$C = kd$ avec les définitions :

- C est la courbure de l'espace.
- k est une constante : $k = G/c^2$
-d est la densité (appellation commune de la masse volumique)

Nous constatons donc, à la constante k près, la similitude entre C et d.

En conséquence, on peut considérer que, comme d est la dérivée de la $\tan \alpha$, C représente aussi sa dérivée ; si R est le point de mesure et d la densité en ce point (ou la courbure) nous aurons alors :

$\tan \alpha = d\, R = C\, R/k$

Et en conséquence nous pouvons extrapoler à C les caractéristiques de d :

-La vitesse au carré (ou le champ R'^2) exprimée par $d\, R^2$ s'exprimera par $C\, R^2$.

-Mais a-t-on le droit d'écrire que 2GM, l'intégrale de R'^2 est égale à $C\, R^3$??

-Cinquième application : vitesses stellaires et galaxies spirales

L'observation montre que dans une galaxie spirale, les vitesses stellaires sont identiques à travers la galaxie. Pour la Voie Lactée par exemple, elle est de l'ordre de 250 km/s .
Dans le chapitre « La gravitation » nous avons vu que cette égalité des vitesses était imputable à la morphologie spirale de la galaxie, et qu'à l'inverse cette égalité des vitesses suggérait une structure spirale.
En effet, en considérant comme généralisable à la Galaxie le calcul de la dérivée de la masse, applicable par exemple au Soleil, on a :

$2GMo / R_T = R'_T{}^2 = V_T{}^2$ soit $2GMo = R_T V_T{}^2$

avec Mo = masse solaire
R_T = distance Terre-Soleil
VT = vitesse moyenne de la Terre sur son orbite

Ainsi, la Terre étant située à 150.10^6 km du Soleil, et sa vitesse étant de 30 km/s, on écrit :

$2GMo = 150.10^6. 30^2$

En ce qui concerne la Voie Lactée, nous allons diviser son rayon en portions égales, 10 par exemple, et nous aurons de R_1 à R_{10} des portions successivement croissantes de la masse telles que, à R_1 correspondant une masse M_1, à R_2 une masse M_2 etc…on aura :

$M_2 = 2 M_1$ et $R_2 = 2 R_1$
$M_{10} = 10 M_1$ et $R_{10} = 10 R_1$

Avec la même vitesse V² à travers la Galaxie, on peut écrire :

$2GM_1 /R_1 = 2GM_2 /R_2 =\ldots\ldots= 2GM_{10} /R_{10} = 2G.10 M_1 /10 R_1 = V^2$

En effet, toutes les portions acceptant la même dérivée, les vitesses sont égales à travers toute la Galaxie.
En effectuant le calcul directement en M_{10}, pour la totalité de la masse galactique estimée à 10^{11} étoiles, alors que R_{10} est estimé à 50.000 AL, on a :

1 AL = 10^{13} km ; 50.000 AL = $5.10^4.10^{13}$ km = $5. 10^{17}$ km

En prenant une masse stellaire moyenne de l'ordre de celle du Soleil, on écrit :
$2GMo.10^{11} / 5. 10^{17}$ km = $V_G{}^2$ (V_G étant la vitesse stellaire galactique)
Après simplification, il vient pour 2GMo :

$2GMo = 5.10^6.V_G{}^2$

Soit : $2GMo = R_T V_T{}^2 = 150.10^6 V_T{}^2 = 5.10^6 V_G{}^2$
Soit : $V_G{}^2 = 150/5 V_T{}^2 = 30 V_T{}^2$
Ce qui donne, pour $V_T = 30$ km/s V_G voisin de 165 km/s
Donc, dans les valeurs acceptées des paramètres, la vitesse est un peu faible.
Pour obtenir 250 km/s, on peut :
-augmenter la masse galactique pour le même rayon
-diminuer le rayon galactique pour la même masse
-faire jouer un peu des 2

-Augmenter la masse galactique : il faut que $V_G{}^2 / V_T{}^2 = 250^2/30^2 = 69$ soit

$V_G = 8,3 V_T$

Pour passer de $V_G^2 = 30\ V_T^2$ à $V_G^2 = 69\ V_T^2$, il y a un facteur de 2,3
Donc la masse galactique est sensée « peser » $2{,}3.10^{11}$Mo.
Ceci peut s'obtenir : soit en augmentant le nombre d'étoiles de masse Mo dans la Galaxie ; soit en augmentant la taille moyenne des étoiles pour un même nombre : 2,3 Mo feraient l'affaire : elle serait un peu plus du double du Soleil.
Les estimations sont plutôt en faveur d'un plus grand nombre d'étoiles, le chiffre de 10^{11}Mo étant « un minimum ». Ceci diminuerait d'autant la masse stellaire moyenne nécessaire au résultat.

-Diminuer le rayon galactique (en théorie purement)
Si celui-ci ne faisait que 40.000 AL par exemple pour le même nombre d'étoiles, la vitesse passerait à 183 km/s. Pour obtenir une vitesse de 250 km/s, il faudrait alors soit un nombre de $1{,}84.10^{11}$ Mo, soit une valeur de la masse moyenne à 1,84 Mo pour 10^{11} étoiles.

CONCLUSION

Nous rappellerons que l'objectif de ce travail (essentiellement dans les chapitres « La Gravitation » et « Archimède ») a été d'essayer de comprendre un paradoxe : comment des corps de même masse, mais de volumes très différents, peuvent-ils avoir un comportement gravitationnel de surface différent, alors qu'à distance leur comportement est strictement le même ?

Dans les objets « courants », le seul exemple connu de modification de volume, et donc de changement de champ gravitationnel de surface, est le trou noir, dont le champ à distance ne se modifie pas tant que sa masse reste constante (après éventuelle supernova)

Alors, où trouver ailleurs une étude de variation du comportement d'un « objet » en fonction de son volume ? Le seul, qui a été étudié par Einstein, est l'Univers.

Si l'on ne retient pas k (la courbure de l'Univers serait égale à zéro aux notions actuelles) et λ (constante cosmologique) tenue pour négligeable dans le comportement de l'Univers proche, la formule simplifiée devient :

$$R'^2 / R^2 = 8\ \pi\ G\ d / 3$$

R' ; R et d sont la vitesse d'expansion, le rayon et la densité (ou masse volumique) à l'instant (t) considéré, soit : R'(t) ; R(t) et d(t)

Cette formule est assez austère et un peu énigmatique. Mais elle s'éclaire brusquement grâce à la transformation de Tolman :

$$R'^2 = 8\ \pi\ G\ d\ R^2 / 3 = 2\ GM / R$$

En effet, les 2 options représentent les choix de formules possibles suivant que l'Univers est considéré comme un gaz de galaxies, ou un corps « matériel »

Il est alors possible de constater que l'intégrale de $R'^2(t)$, c'est-à-dire avec un rayon d'Univers R(t) s'écrit :

$$\Sigma_o^{R(t)}\ 8\ \pi\ G\ d(t)\ R^2(t) / 3 = 8\ \pi\ G\ d(t)\ R^3(t) / 3 = \text{constant} = 2GM_u$$

Constant parce que représentant la masse du volume d 'Univers concerné, hors notion de temps.

Donc, quel que soit le temps considéré, le carré de la vitesse d'expansion $R'^2(t)$ représente toujours la dérivée de la masse d 'Univers dans un rayon R(t) correspondant.

Le caractère supposé fractal du comportement de l'Univers et des objets qui le composent doit être vérifié par la similitude des formules relatives à leurs comportements respectifs.

Si donc on considère des corps célestes quelconques de masse fixe M mais de différents volumes possibles de rayons R_1, R_2 etc.., on constate que le carré de la vitesse orbitale d'un satellite est donné par une formule issue de Newton :

$$V_1^2 = 2\ GM / R_1\ ;\quad V_2^2 = 2\ GM / R_2\ \text{ etc …}$$

(d'où l'intégrale $2\ GM/ 4\pi^2 = R_1\ V_1^2 = R_2\ V_2^2$ etc…)

La dérivée de V^2 (l'accélération γ) est donnée par :

$$V_1^2/ R_1 = 2GM / R_1^2 = \gamma_1\ ;\quad V_2^2/ R_2 = 2GM / R_2^2 = \gamma_2 \quad \text{etc...}$$

La force s'exerçant sur le satellite de masse m s'écrit :

$$F_1 = m\ .\ 2GM / R_1^2 = m\ .\ V_1^2/ R_1 = m\ .\gamma_1$$
$$F_2 = m\ .\ 2GM / R_2^2 = m\ .\ V_2^2/ R_2 = m\ .\gamma_2$$

La dérivée de l'accélération (la densité) s'écrit :

$$V_1^2/ R_1^2 = 8\ \pi\ G\ d_1 /3 = \gamma_1 / R_1$$
$$V_2^2/ R_2^2 = 8\ \pi\ G\ d_2 /3 = \gamma_2 / R_2$$

Ainsi, on constate que la formule fournissant V^2 est identique à celle qui donne R'^2 : ce sont les dérivées de corps de masse constante et de volumes variables.

On peut alors écrire, pour des satellites en R_1, R_2 etc d'une masse M :

-La troisième loi de Képler : $R_1^3 / T_1^2 = R_2^3 / T_2^2 = 2GM / 4\pi^2$

-L'égalité en termes de carrés des vitesses :

$$R_1V_1^2 = R_2V_2^2 = 2GM / 4\pi^2 = R_S\ c^2 \text{ (} R_S = \text{rayon de Scharzschild de M)}$$

-La similitude des 2 dérivées de la masse M, respectivement en R_1 et R_2 :

$$V_1^2 = 2GM / R_1 = 8\ \pi\ G\ d_1\ R_1^2 / 3$$
$$V_2^2 = 2GM / R_2 = 8\ \pi\ G\ d_2\ R_2^2 / 3$$

Avec $8\ \pi\ G\ d_1\ R_1^3 / 3 = 8\ \pi\ G\ d_2\ R_2^3 / 3 = 2GM$ (intégrale constante des V^2)

La première partie ($2GM / R$) est une hyperbole.

La seconde partie ($8\ \pi\ G\ d\ R^2 / 3$) est une parabole.

L'égalité correspond au croisement des 2 courbes, en R_1 par exemple, où :

$$V_1^2 = 2\ GM / R_1 = 8\ \pi\ G\ d_1\ R_1^2 / 3$$

-Les dérivées successives :

$$RV^2 = 2GM = 8\ \pi\ G\ d\ R^3 / 3$$
$$V^2 = 2GM / R = 8\ \pi\ G\ d\ R^2 / 3$$
$$V^2/ R = \gamma = 2GM / R^2 = 8\ \pi\ G\ d\ R / 3$$
$$V^2/ R^2 = \gamma / R = 2GM / R^3 = 8\ \pi\ G\ d / 3$$

-Si j'ai apparemment indifféremment utilisé V^2 ou R'^2 dans le cours des exposés, c'est peut-être parce que j'ai gardé en mémoire l'image des surfeurs : ils donnent l'impression de se déplacer à une vitesse V par rapport à la plage, alors que leur vitesse relative par rapport à la vague est nulle : nous nous déplaçons à la même vitesse R' que l'Univers.

Le champ gravitationnel s'exprime donc avec les mêmes formules, que l'on étudie un « objet local » en V^2 (Soleil, Terre ou pomme de Newton) ou de manière plus « générale » en R'^2 (Expansion de l'Univers, récession des galaxies). Nous sommes donc apparemment autorisés à parler de comportement fractal de la matière.

POST – SCRIPTUM

Un observateur (toujours le même !) m'a gentiment fait remarquer que la valeur physique de V^2 (soit $8\pi GdR^2/3$) représentait le tiers de la valeur mathématique (soit $8\pi GdR^2$) de la dérivée de 2GM (soit $8\pi GdR^3/3$) et m'a incité à essayer de trouver une explication.

J'ai donc imaginé la solution suivante (figure 8)

Soit un référentiel tridimensionnel orthogonal (O, x, y, z) baignant dans un milieu homogène de densité d , limité aux 3 vecteurs X, Y, Z portés sur leurs axes dédiés (Ox, Oy, Oz) depuis le centre O. Les 3 vecteurs sont égaux : X = Y = Z = R , rayons d'une sphère de centre O, de rayon R et de densité d .

Les vecteurs résultant des combinaisons de X, Y et Z portent 2 lettres comme référence de leur provenance : (X ,Y) pour la combinaison de X et Y ; (X, Z) pour X et Z ; et bien sûr (Y, Z) pour Y et Z . Le vecteur résultant final porte les 3 références : (X, Y, Z)

Nous aurons donc :

$$X^2 + Y^2 = (X, Y)^2 = 2 X^2$$
$$X^2 + Z^2 = (X, Z)^2 = 2 X^2$$
$$Y^2 + Z^2 = (Y, Z)^2 = 2 X^2$$

En combinant ces données bidimensionnelles avec la troisième dimension complémentaire :

$$(X, Y)^2 + Z^2 = (X, Y, Z)^2 = 3 X^2$$
$$(X, Z)^2 + Y^2 = (X, Y, Z)^2 = 3 X^2$$
$$(Y, Z)^2 + X^2 = (X, Y, Z)^2 = 3 X^2$$

En posant $V^2 = 8\pi GdX^2/3 = 8\pi GdR^2/3$ on constate que le vecteur (X, Y, Z) se projette donc de manière orthogonale sur les 3 directions Ox, Oy et Oz avec une valeur telle que :

$$V^2(x) + V^2(y) + V^2(z) = 3\ V^2 = (X, Y, Z)^2$$

Donc $\quad 3\ V^2 = 8\pi GdR^2$

On a alors $\quad \Sigma_o^R\ 8\pi GdR^2 = 8\pi GdR^3/3 = 2GM$

On peut penser que la masse 2GM présente donc une dérivée tridimensionnelle 3 V^2 se distribuant de manière unidimensionnelle en V^2 sur chacun des 3 axes Ox, Oy et Oz de l'espace. La dimension en V^2 que nous percevons semble alors dûe à nôtre perception unidimensionnelle du phénomène, liée à nôtre « axe de visée » ou de mesure (soit Ox, soit Oy, soit Oz). Lorsque 2 corps sont en relation gravitationnelle, c'est la ligne droite ou la géodésique qui les relie qui gère la question ; les 2 autres dimensions resteraient alors étrangères à l'expression locale du mécanisme.

Le même problème vu sous l'aspect de champs gravitationnels nous entraîne vers une Equation de Poisson particulière, où X, Y et Z seraient égaux à R :

$$R'^2(x) / X^2 + R'^2(y) / Y^2 + R'^2(z) / Z^2 = 8\pi Gd \quad \text{devient :}$$
$$R'^2(x) / R^2 + R'^2(y) / R^2 + R'^2(z) / R^2 = 3\ R'^2(r) / R^2 = 8\pi Gd$$

ou encore : $\quad R'^2(r) / R^2 = 8\pi Gd / 3 \quad$ et $\quad R'^2(r) = 8\pi GdR^2 / 3 = V^2(r)$

Ce résultat concorde avec la conception que je viens d'évoquer et renforce l'impression que $V^2 = 2GM/R = 8\pi GdR^2 / 3$ serait lié à la perception unidimensionnelle (selon Ox, Oy ou Oz) de la gravitation, suivant « l'axe de visée » ou la géodésique reliant la masse et le point de mesure ou d'exercice du champ.

La dérivée mathématique de 2GM sera la somme des expressions de V^2 suivant les 3 directions orthogonales, dans un système tridimensionnel en X^3.

Une autre manière de retrouver 3 V² est de considérer la première équation de Friedman, relative à la densité. Il écrit :

$$3 (H^2 / c^2 + k / a^2) = 8\pi G\rho / c^4$$

Nous allons utiliser nos unités : R pour a ; d pour ρ ; enfin on pose c = 1.
De plus, k est considéré actuellement égal à zéro. Il vient :

$3 H^2 = 8\pi Gd$. Soit :

$3 R'^2 / R^2 = 8\pi Gd$; après une transformation de Tolman :

$3 R'^2 = 8\pi Gd R^2$

Donc : $\Sigma_o^R 8\pi GdR^2 = 8\pi GdR^3 / 3 = 2GM$

Frieman met donc mieux en exergue que 3 R'² (ou 3 V²) est la dérivée de 2GM, alors que Tolman dont l 'expression est $R'^2 = 8\pi GdR^2 / 3$ masque cette filiation.

L'application physique de 3 V² revient à la disposition spatiale sur le référentiel orthogonal (O,x,y,z) considéré.

Ceci est relativement simple. Mais avec une masse unique comme le Soleil, et un cortège de planètes ? La troisième loi de Képler aboutit à :

$R_1V_1^2 = R_2V_2^2 = R_3 V_3^2 =$ « $2GM_o$ » Ou aussi :

$V_1^2 = 8\pi Gd_1R_1^2 / 3$ soit $\Sigma_o^{R1} 3.\ 8\pi Gd_1R_1^2 / 3 = 8\pi Gd_1R_1^3 / 3 = 2GM_o$

$V_2^2 = 8\pi Gd_2R_2^2 / 3$ soit $\Sigma_o^{R2} 3.\ 8\pi Gd_2R_2^2 / 3 = 8\pi Gd_2R_2^3 / 3 = 2GM_o$

$V_3^2 = 8\pi Gd_3R_3^2 / 3$ soit $\Sigma_o^{R3} 3.\ 8\pi Gd_3R_3^2 / 3 = 8\pi Gd_3R_3^3 / 3 = 2GM_o$

avec la même « intégrale tridimensionnelle » $2GM_o$ pour chacune des planètes en R_1, R_2 et R_3.

En ce qui concerne l'accélération, elle dérive de $V^2 = 8\pi GdR^2 / 3$ mais vaut mathématiquement le double ($8\pi Gd.2R/3$) de la valeur physique estimée par : $V^2/R = 8\pi GdR/3$.

Nous avons peut-être une explication de ces divergences mathématique et physique dans la quatrième application « courbure de l'espace » vue plus haut.
En effet, nous avons vu que si nous considérions la tan α à la courbe $8\pi GdR^2/3 = V^2$, qui représente la dérivée mathématique de la fonction V², celle-ci est égale à $8\pi Gd.2R/3$, soit le double de la valeur $V^2/R = 8\pi GdR/3 = \gamma$, accélération « physique ».

On peut donc relever une certaine discordance entre les valeurs « physiques » déduites de la « cascade » 2GM ; 2GM/R ; 2GM/R² ; 2GM/R³ chères à Einstein, et les valeurs « mathématiques » des dérivées correspondantes. En tous cas, si V² peut être considérée comme une dérivée hypothétique de 2GM, nous sommes certains que l'accélération V²/R est bien considérée comme la dérivée de V²…

Une explication est, ici aussi, à trouver. Doit-elle inclure que tan α représente l'expression mathématique à la fois de la force gravitationnelle sur la masse pesante, et de la force centrifuge sur la masse inertielle, ces 2 forces à la même expression V²/R s'exerçant de manière simultanée sur l'objet ?

Un schéma est à imaginer pour donner corps à cette hypothèse. Si une proposition m'apparaissait, je ne manquerais pas de vous le faire savoir.

Ainsi, j'ai tenté de donner une explication à la discordance entre les valeurs physique et mathématique de V² si on la considère comme la dérivée de la masse 2GM, ainsi qu'à l'accélération, dérivée authentique de V².

J'espère que vous trouverez mes solutions cohérentes (et acceptables ?)

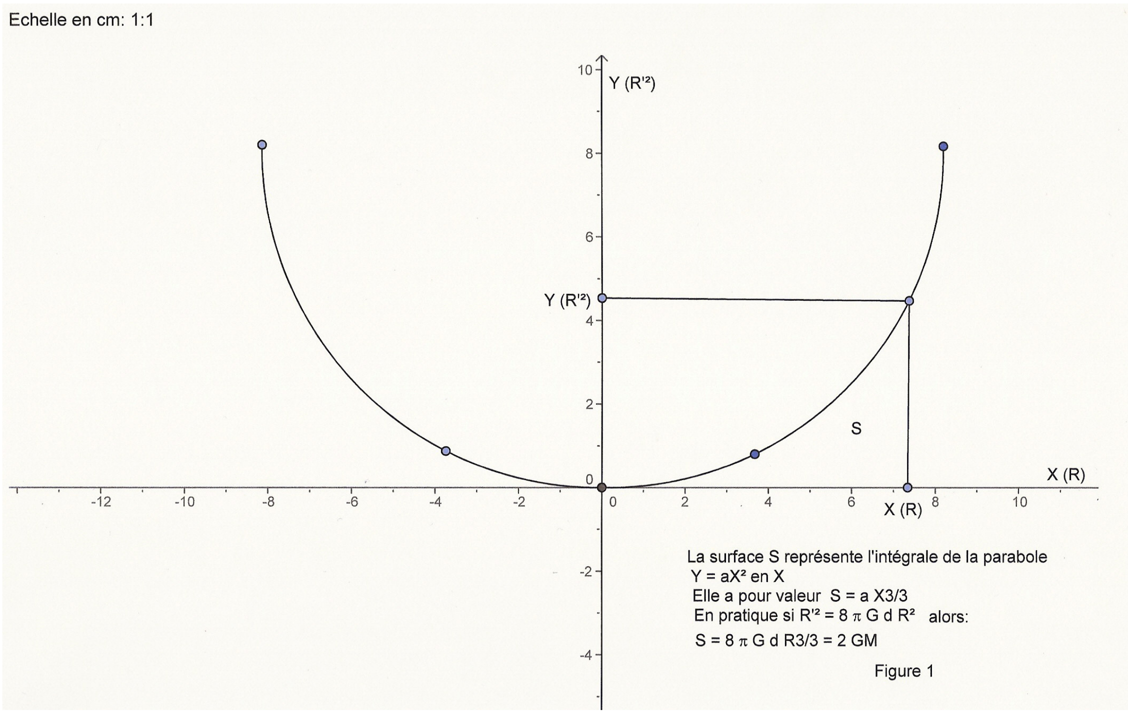


Figure 1

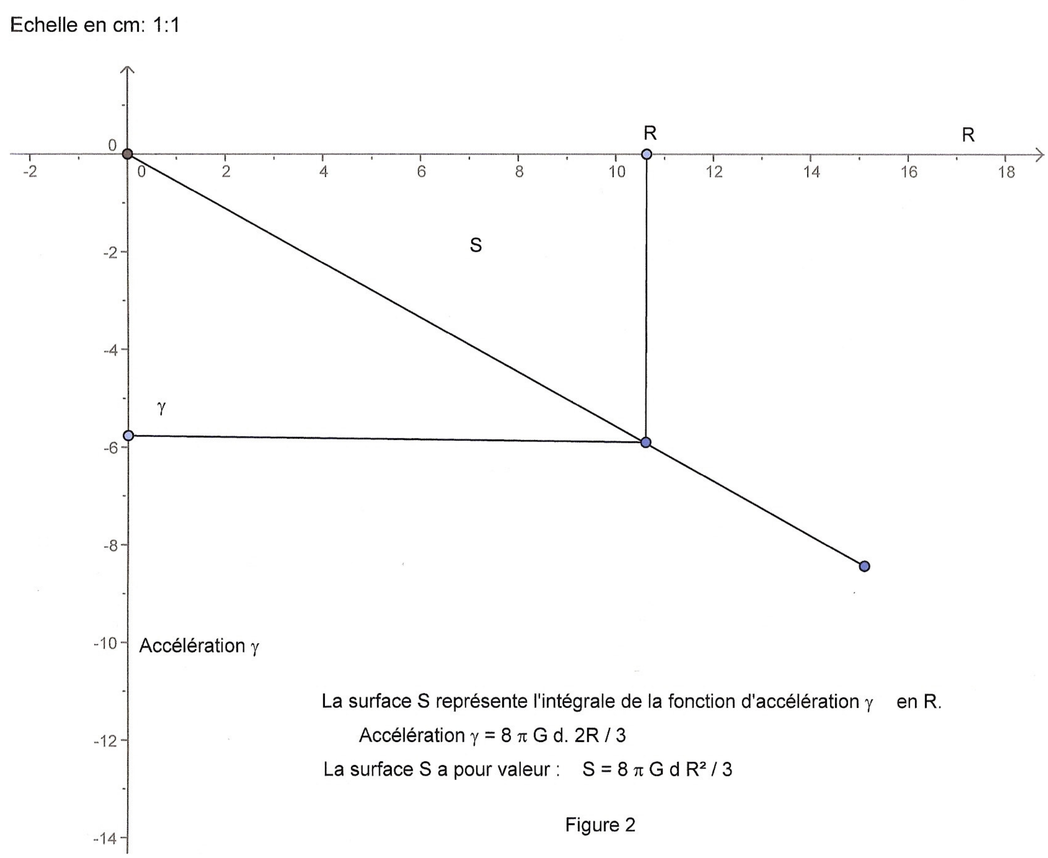
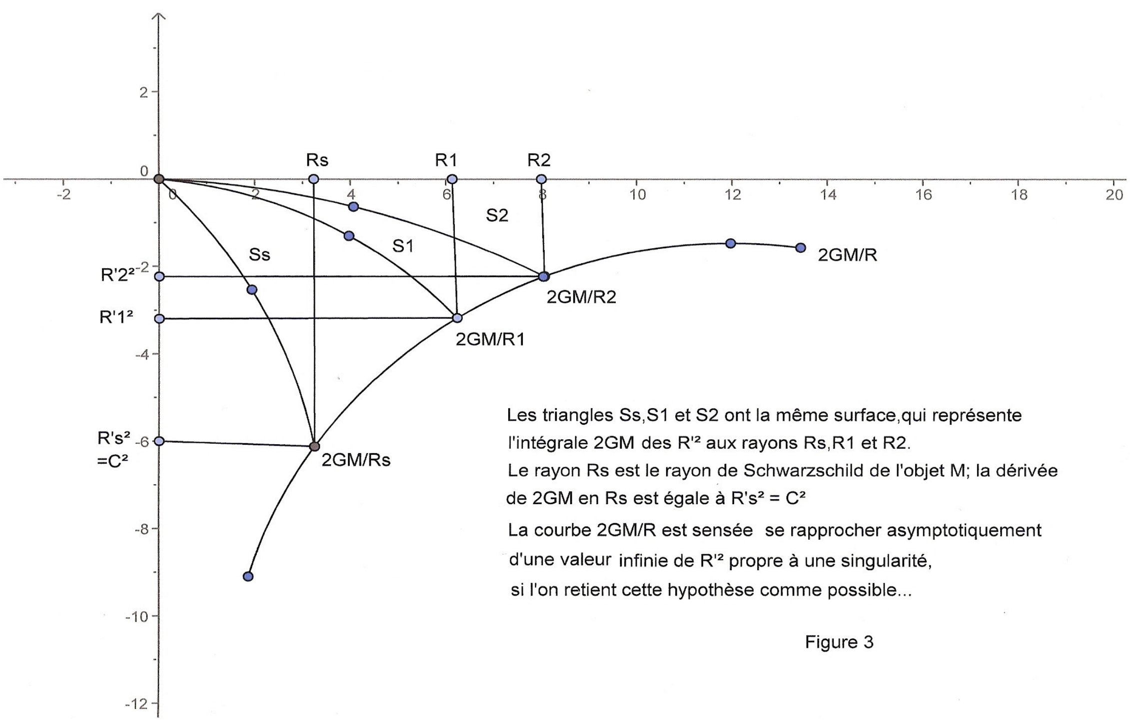
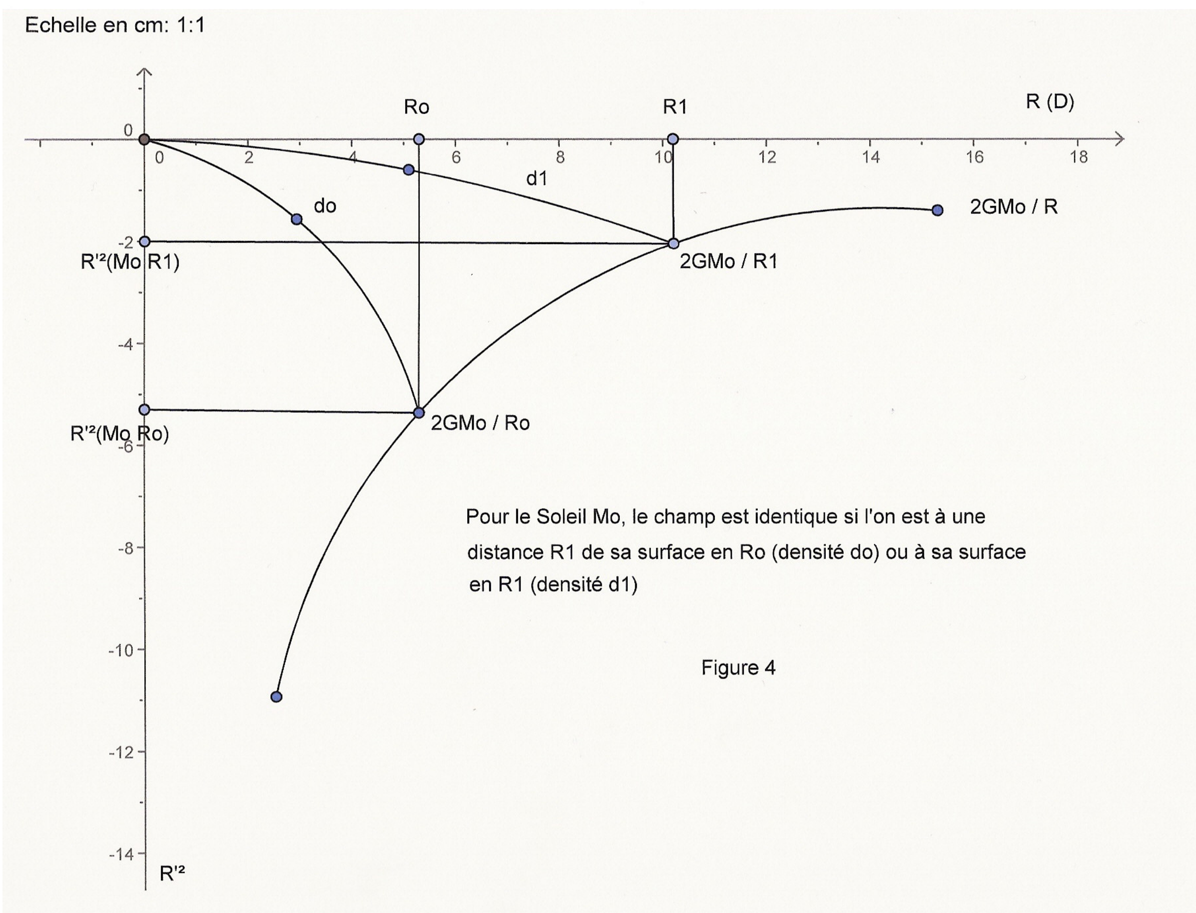


Figure 2



Les triangles Ss,S1 et S2 ont la même surface,qui représente l'intégrale 2GM des R'² aux rayons Rs,R1 et R2.
Le rayon Rs est le rayon de Schwarzschild de l'objet M; la dérivée de 2GM en Rs est égale à R's² = C²
La courbe 2GM/R est sensée se rapprocher asymptotiquement d'une valeur infinie de R'² propre à une singularité, si l'on retient cette hypothèse comme possible...

Figure 3



Pour le Soleil Mo, le champ est identique si l'on est à une distance R1 de sa surface en Ro (densité do) ou à sa surface en R1 (densité d1)

Figure 4

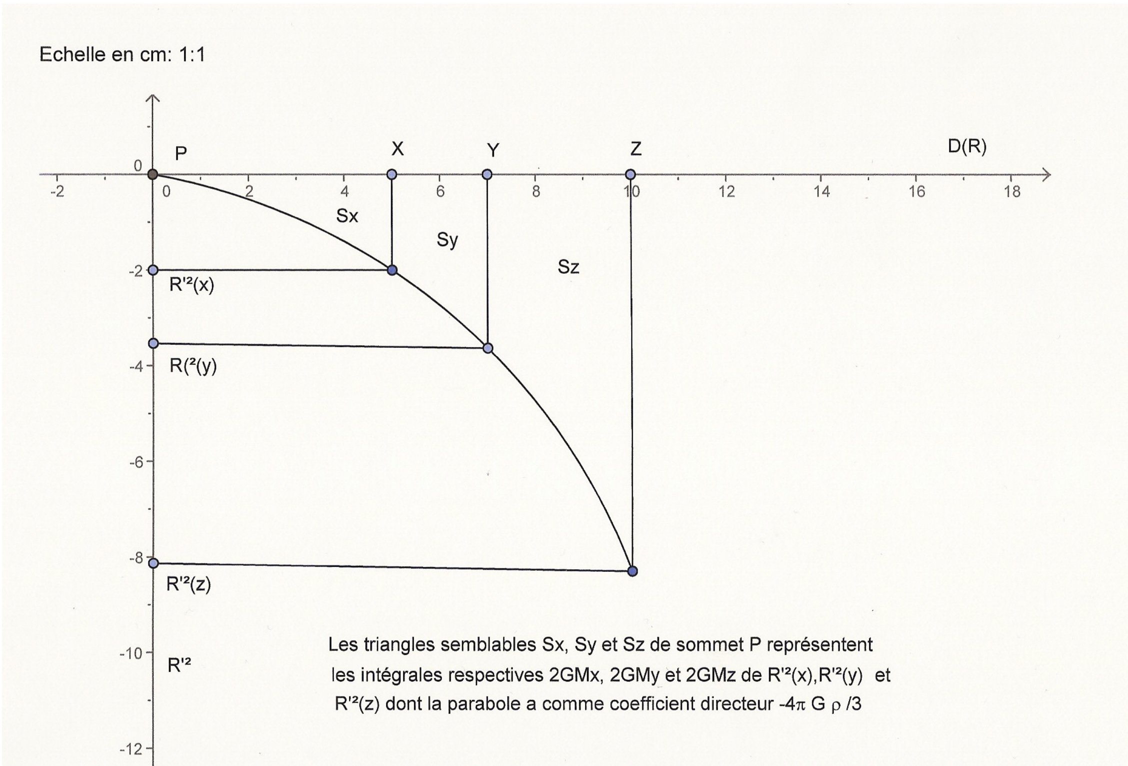


Figure 5

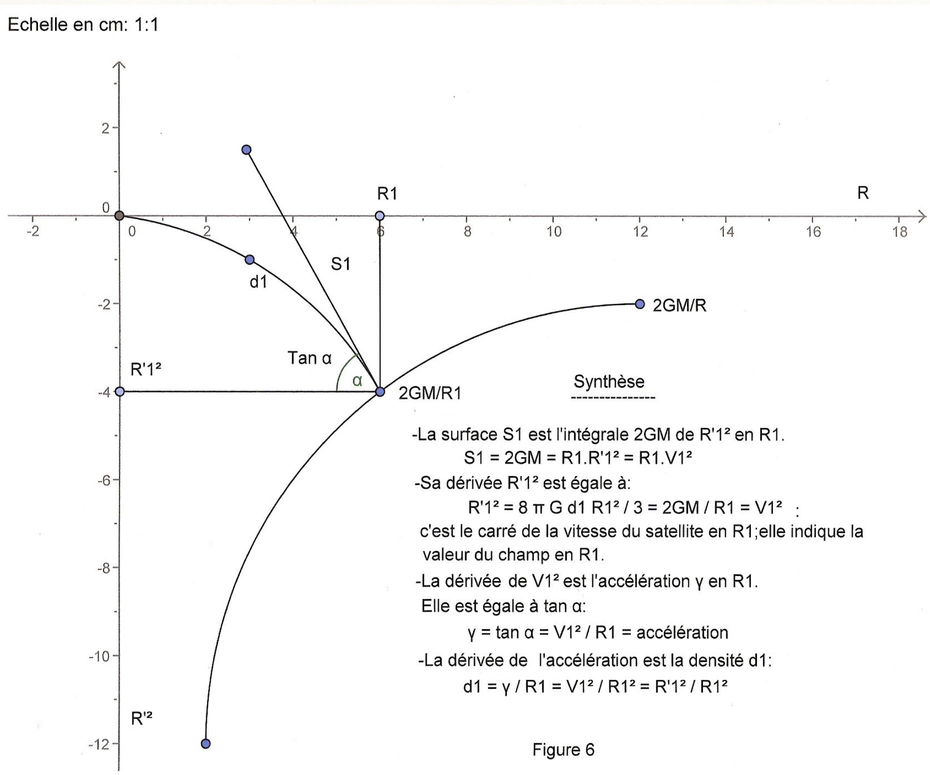


Figure 6

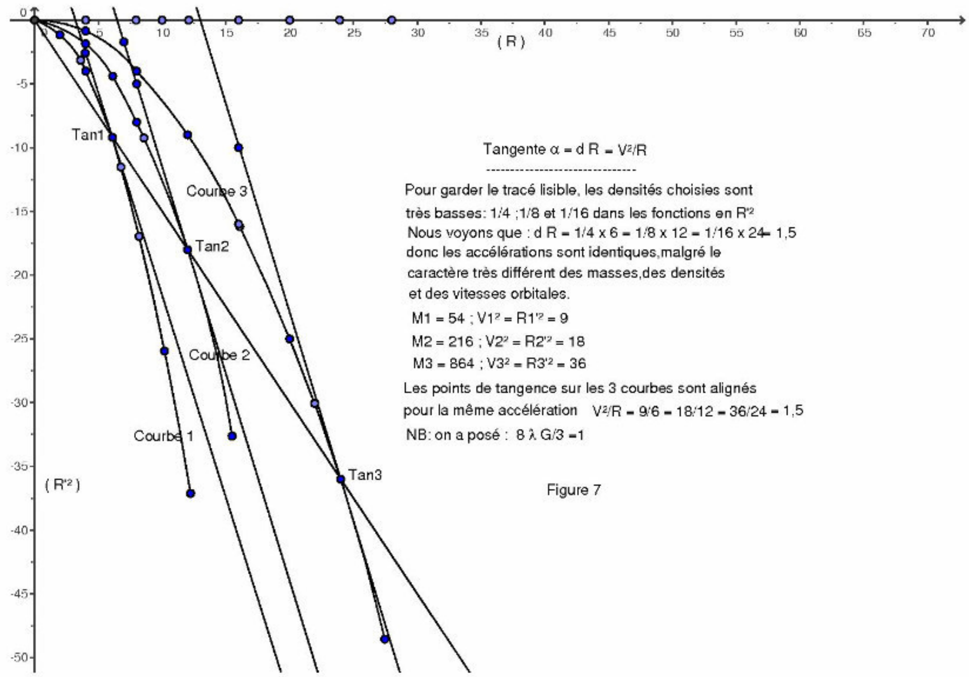


Figure 7

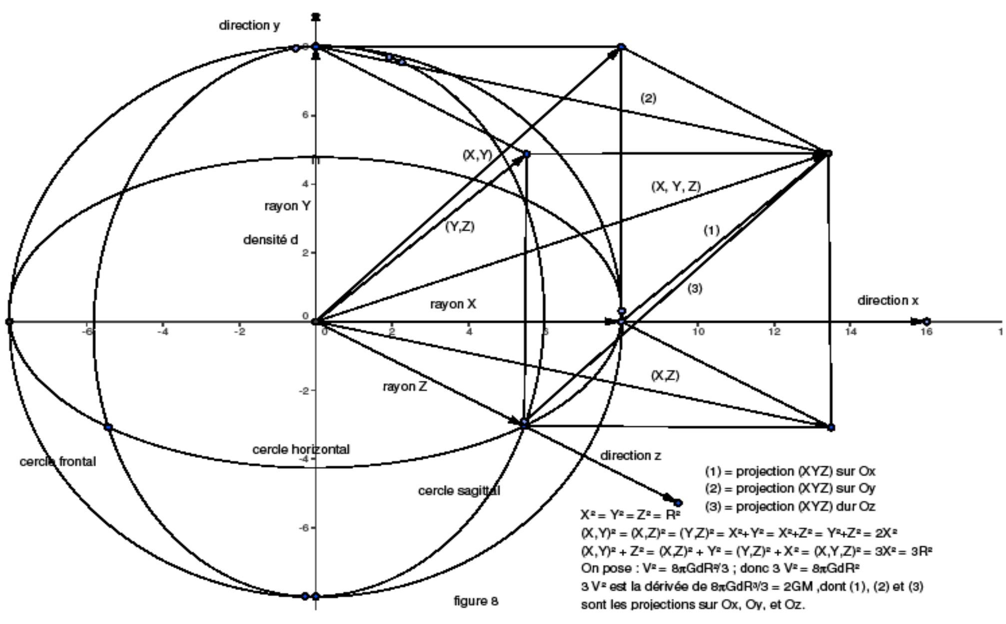


figure 8